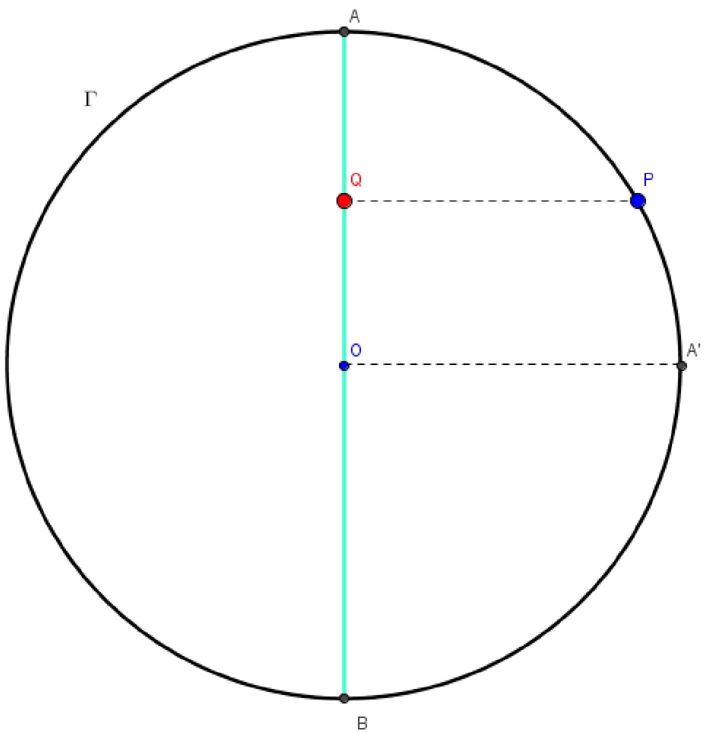
Il moto armonico

1. Definizione di moto armonico

Un punto P si muove di moto **circolare uniforme** lungo la circonferenza Γ in figura, con velocità angolare ω.

Considero uno dei diametri della circonferenza[1], ad esempio il **diametro verticale** AB, e indico con $\boldsymbol{Q}$ la proiezione ortogonale di P su AB.

Comincio a studiare il moto di P quando il corpo P passa per il punto A' in figura[2]:



Puoi osservare il movimento dei due punti P e Q nel file **motoArmonico.ggb**.

Il moto del punto Q viene detto **armonico**.

[1] La scelta del diametro è assolutamente ininfluente: posso prenderne uno qualunque.
[2] Nulla vieta di assumere come posizione iniziale di P un punto differente da A'.

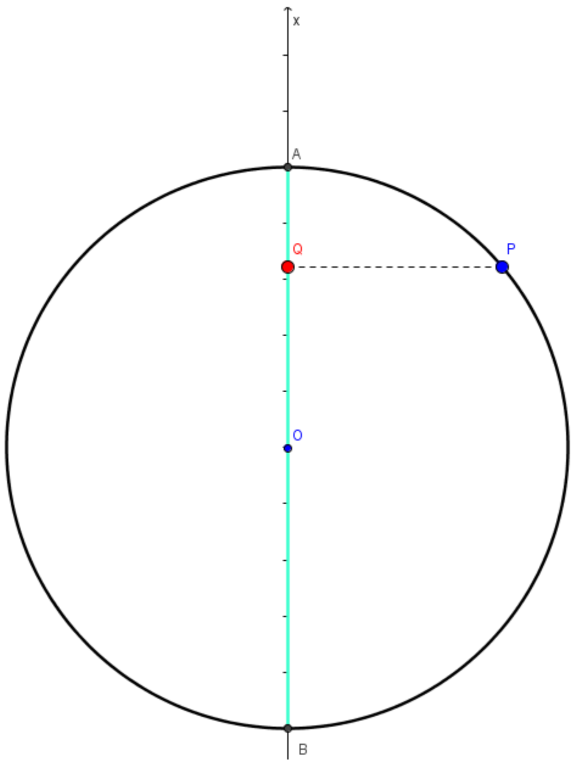
Quando P compie un giro completo di Γ, Q **oscilla** toccando in **sequenza** i punti O, A, O, B, O.
L'oscillazione $OAOBO$ viene detta **completa**.

Il moto di Q è dunque un moto **oscillatorio**, che ripete indefinitamente l'oscillazione completa.
Inoltre, è un moto **periodico**: il suo periodo periodo è identico a quello del moto circolare uniforme, e dunque:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (1)$$

2. Un sistema di riferimento per lo studio del moto armonico

Per studiare il moto armonico, introduco un **sistema di ascisse** sul diametro, assumendo il centro O di Γ come **origine** e come verso positivo del sistema quello che va dal basso verso l'alto.

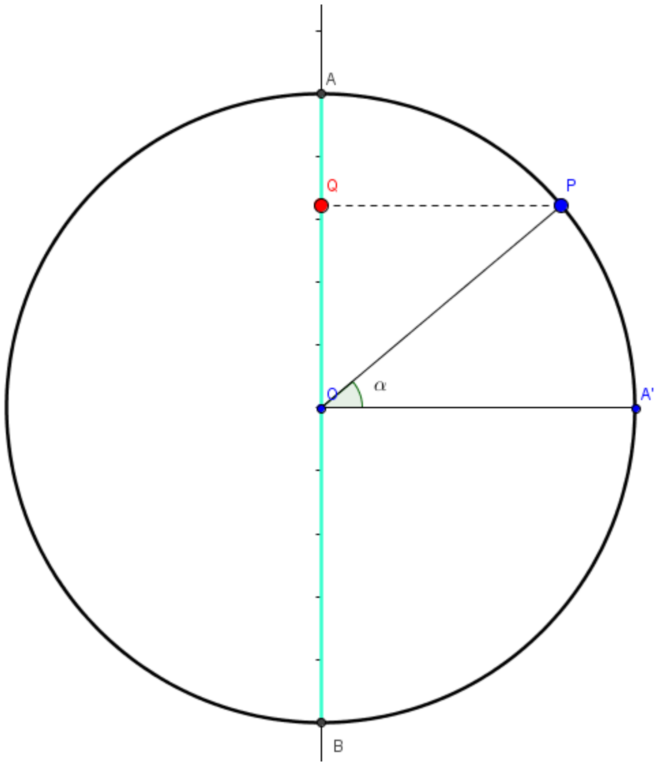


La **posizione di Q sul diametro** AB è allora individuata da un numero reale, la sua **ascissa**.

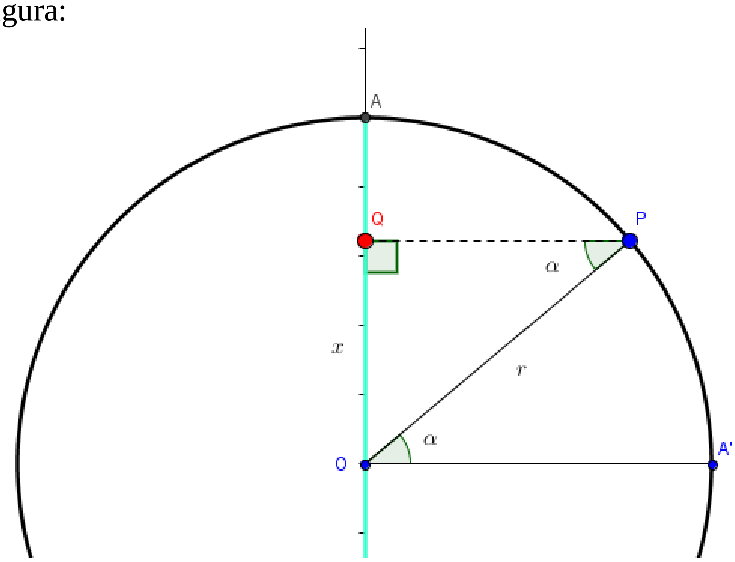
3. La legge oraria del moto armonico

Determino la **legge oraria** del moto armonico, **come varia cioè l'ascissa del punto *Q* in movimento rispetto al tempo**.

La posizione di P sulla circonferenza **Γ** è determinata dall'**ascissa angolare** α in figura:



Con riferimento alla figura:



il triangolo OQP è rettangolo e l'angolo $Q\hat{P}O$ è congruente ad α : infatti, i due angoli $Q\hat{P}O$ e $P\hat{O}A'$ sono angoli alterni interni formati dalle due parallele QP, OA' tagliate dalla trasversale OP.

Indicata con x l'ascissa di Q, il teorema dei triangoli rettangoli porge la relazione:

$$x = r \cdot sen(\alpha) \qquad (2).$$

La relazione (1) esprime la **dipendenza della variabile x dalla variabile α**.
Utilizzando la **notazione funzionale**, posso scrivere più efficacemente:

$$x(\alpha) = r \cdot sen(\alpha) \qquad (3).$$

Per determinare la legge oraria, ho bisogno di **esprimere la variabile α in funzione della variabile temporale t**.

Per definizione, la velocità angolare ω con cui ruota P vale:

$$\omega = \frac{\alpha}{t} \qquad (4)$$

Ricavo α dalla (4):

$$\alpha = \omega \cdot t \qquad (5)$$

Sostituendo la (5) nella (2), ottengo:

$$x = r \cdot sen(\omega \cdot t) \qquad (6)$$

La (5), che esprime la dipendenza dell'ascissa x di Q in funzione del tempo t, è pertanto la **legge oraria del moto armonico**.

Riscrivo la **legge oraria**[3] utilizzando la notazione funzionale:

$$x(t) = r \cdot sen(\omega \cdot t) \qquad (7)$$

[3] La (7) è una relazione di **carattere sinusoidale**.

Le **variabili** che compaiono nella (7) sono ovviamente t ed x.
In particolare, t è la variabile indipendente, mentre x è la variabile dipendente.

r e ω, invece, sono due **parametri**.

Il **significato fisico** di questi due numeri è presto detto: r è la massima ampiezza dell'oscillazione[4], mentre ω, attraverso la relazione[5]:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (8)$$

fornisce il periodo.

4. Un esempio di moto armonico

Suppongo che il raggio r della circonferenza percorsa da P sia **2 m** e che ω sia **1** $\mathbf{\frac{rad}{s}}$.
La **legge oraria di $\boldsymbol{Q}$** è allora[6]:

$$x(t) = 2 \cdot sen(t) \qquad (9)$$

La (9) consente, com'è noto, di **determinare la posizione di $\boldsymbol{Q}$ in ogni istante**.

Il **periodo** del moto armonico di Q è[7]

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \cong 6{,}28 \text{ s}$$

Nella tabella che segue, compilata utilizzando[8] la (9), nella prima colonna compare l'**istante di tempo** e nella seconda l'**ascissa** del punto Q nei primi $\mathbf{1{,}5}$ **s** del moto:

---

[4] L'ascissa del punto Q varia infatti da $-r$ a r.
[5] La (8) si ricava immediatamente dalla (1).
[6] Confronta la relazione (7).
[7] Vedi la relazione (1).
[8] Ricava gli stessi dati **utilizzando una calcolatrice**.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.199 \\ 0.2 & 0.397 \\ 0.3 & 0.591 \\ 0.4 & 0.778 \\ 0.5 & 0.958 \\ 0.6 & 1.12 \\ 0.7 & 1.28 \\ 0.8 & 1.43 \\ 0.9 & 1.56 \\ 1 & 1.68 \\ 1.1 & 1.78 \\ 1.2 & 1.86 \\ 1.3 & 1.92 \\ 1.4 & 1.97 \\ 1.5 & 1.99 \end{bmatrix}$$

Noto che **dopo $\mathbf{1,5\ s}$** il corpo è *molto vicino* all'estremo A del diametro: infatti, il tratto OA, quarta parte dell'oscillazione completa, viene percorso nella **quarta parte del periodo**, cioè in $\mathbf{1,57\ s}$.

Trascorsi poco più di **7** centesimi di secondo, dunque, il punto Q raggiunge la posizione A.

5. La velocità nel moto armonico: considerazioni preliminari

Con riferimento all'esempio di moto armonico sviluppato nel paragrafo 4, nella tabella che segue mostro **lo spazio percorso da Q nei primi quindici intervalli temporali di ampiezza un decimo**:

$[0,0; 0,1]$	$19,9\ cm$
$[0,1; 0,2]$	$19,8\ cm$
$[0,2; 0,3]$	$19,4\ cm$
$[0,3; 0,4]$	$18,7\ cm$
$[0,4; 0,5]$	$18,0\ cm$
$[0,5; 0,6]$	$16,2\ cm$
$[0,6; 0,7]$	$16,0\ cm$
$[0,7; 0,8]$	$15,0\ cm$

$[0{,}8; 0{,}9]$	$13{,}0\ cm$
$[0{,}9; 1{,}0]$	$12{,}0\ cm$
$[1{,}0; 1{,}1]$	$10.0\ cm$
$[1{,}1; 1{,}2]$	$8{,}0\ cm$
$[1{,}2; 1{,}3]$	$6{,}0\ cm$
$[1{,}3; 1{,}4]$	$5{,}0\ cm$
$[1{,}4; 1{,}5]$	$2{,}0\ cm$

Lo spazio percorso nel medesimo intervallo di tempo (un decimo) **diminuisce** e questo dimostra che **la velocità con cui si sta muovendo Q non è costante**.

Appare inoltre chiaro dai dati che:

1. la **velocità media di Q** è **massima** nel primo intervallo temporale
2. la **velocità di Q nel tratto OA**, primo quarto dell'oscillazione completa, **tende ad azzerarsi** via via che il punto **si avvicina all'estremo A del diametro**. In altri termini, il punto Q **decelera** nel tratto OA.

Possiamo perciò **ipotizzare** che la velocità istantanea di Q sia massima nel centro O dell'oscillazione e nulla nell'estremo A.

E' facile, infine, calcolare il **modulo della velocità media** nei vari intervalli temporali indicati nella precedente tabella.

Se indico con v_1 la velocità media nell'intervallo temporale $[0; 0{,}1]$, con v_2 la velocità media nell'intervallo temporale $[0{,}1; 0{,}2]$, con v_3 la velocità media nell'intervallo temporale $[0{,}2; 0{,}3]$ e così via, ottengo: $v_1 = 1{,}99\ \frac{m}{s}$, $v_2 = 1{,}98\ \frac{m}{s}$ e $v_3 = 1{,}94\ \frac{m}{s}$.

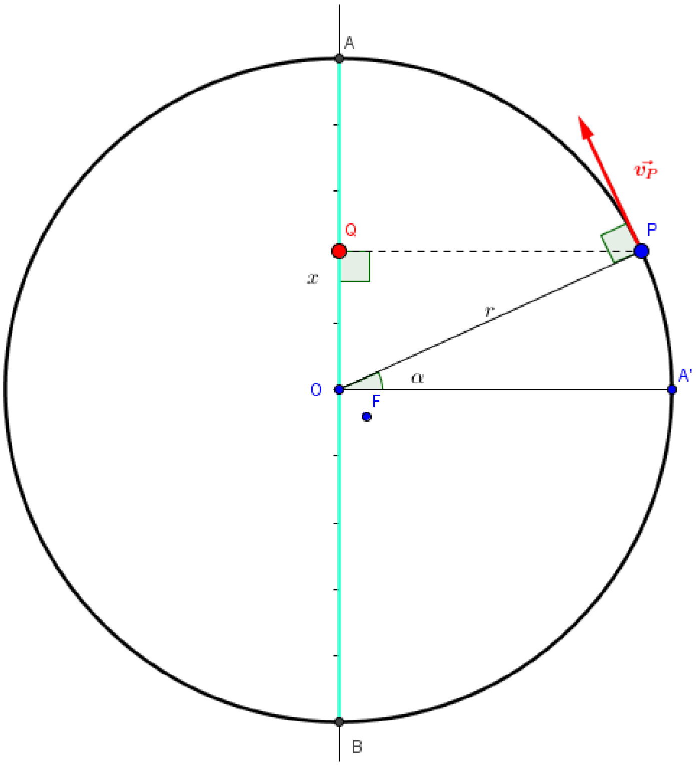
Ti lascio il calcolo del modulo della velocità media nei rimanenti intervalli temporali.

6. La legge della velocità nel moto armonico

Voglio determinare la **legge della velocità** nel moto armonico, come varia cioè **il vettore velocità del punto Q in funzione del tempo**.

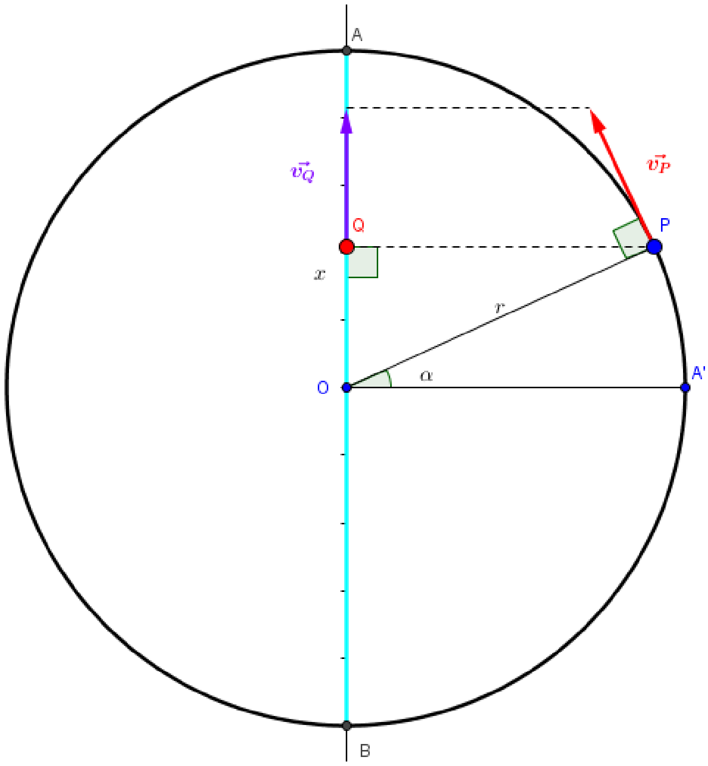
Nella figura che segue ho tracciato il **vettore velocità** $\overrightarrow{v_P}$ associato al punto P.

Tale vettore, com'è noto, ha **direzione tangente alla traiettoria**, ed è dunque perpendicolare[9] al raggio OP, ed ha **modulo**[10] ωr.



Il **vettore velocità** $\overrightarrow{v_Q}$ **associato al punto** Q è la proiezione del vettore velocità $\overrightarrow{v_P}$ sul diametro AB della circonferenza Γ:

[9] E' una notissima proprietà della circonferenza.
[10] Vedi la dispensa sul moto circolare uniforme.



L'esame del file **xxxxxx.ggb** mostra come varia il vettore $\overrightarrow{v_Q}$ al variare della posizione di P sulla circonferenza Γ.

Determino **il vettore** $\boldsymbol{\overrightarrow{v_Q}}$, e dunque la sua **direzione,** il suo **verso** ed il suo **modulo.**

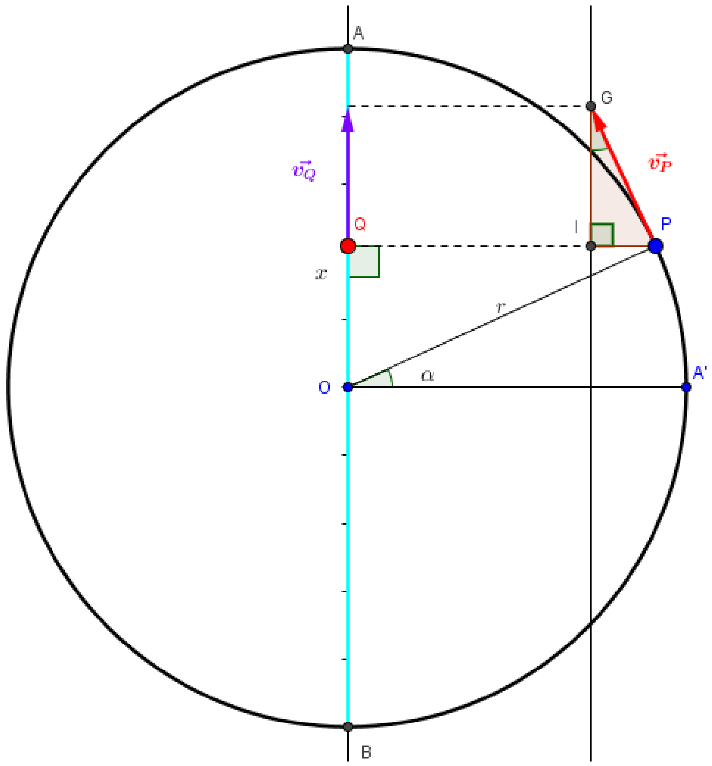
La **direzione del vettore** $\boldsymbol{\overrightarrow{v_Q}}$ è chiaramente quella del diametro AB.

Il **verso del del vettore** $\boldsymbol{\overrightarrow{v_Q}}$ è **positivo**[11] nel primo e nell'ultimo quarto dell'oscillazione completa e **negativo** nei rimanenti due tratti.

Resta da calcolare il **modulo** di $\overrightarrow{v_Q}$.

A tale proposito, considero il triangolo rettangolo GIP in figura:

[11] Il verso del vettore velocità è **positivo** quando il vettore è orientato come l'asse di riferimento, cioè l'asse x.



Il Teorema dei triangoli rettangoli porge la relazione:

$$\overline{\mathrm{IG}} = \overline{\mathrm{GP}} \cdot cos\left(I\hat{G}P\right) \qquad (10)$$

Poiché $\overline{\mathrm{IG}} = v_Q$, $\overline{\mathrm{GP}} = v_P = \omega r$ e $I\hat{G}P = \alpha$ (dimostralo!) ottengo:

$$v_Q = \omega r \cdot cos(\alpha) \qquad (11)$$

ed infine[12], ricordando la (5):

$$v_Q(t) = \omega r \cdot cos(\omega t) \qquad (12)$$

La (12) fornisce il **modulo della velocità del punto Q in funzione del tempo.**

12 La (12) è una relazione di **carattere cosinusoidale**.

7. Un esempio di calcolo della velocità nel moto armonico

Utilizzo la (12) per calcolare la **velocità istantanea**[13] del punto Q nel moto descritto nel paragrafo 4, lungo il tratto di *salita*[14] OA.

In questo caso, la (12) diventa:

$$v_Q(t) = 2 \cdot cos(t) \qquad (13)$$

L'applicazione della (13) conduce alla seguente tabella, nella cui prima colonna compare l'istante di tempo (in secondi) e nella seconda la velocità (in metri al secondo) nell'istante corrispondente:

0	2
0.1	1.99
0.2	1.96
0.3	1.91
0.4	1.84
0.5	1.75
0.6	1.65
0.7	1.52
0.8	1.39
0.9	1.24
1	1.08
1.1	0.907
1.2	0.724
1.3	0.534
1.4	0.339
1.5	0.141

[13] in funzione del tempo.
[14] non è una vera salita, no?