Onde

1. La definizione di onda

Premesso che:

- un **mezzo materiale** è un mezzo dotato di massa (acqua, tubo di acciaio, aria, legno …)
- una **perturbazione** è una variazione di una o più grandezze fisiche,

la **definizione** di onda può essere data nel modo che segue:

- un'**onda** è una **perturbazione** che si propaga nel vuoto o in un **mezzo materiale**.

2. L'onda generata da un sasso gettato in uno stagno

Un sasso gettato nell'acqua placida di uno stagno genera un'**onda**.
Un tappo di sughero posto nello stagno risente del passaggio dell'onda compiendo un **moto oscillatorio lungo la sua verticale**, **senza allontanarsi** dal punto in cui si trova.

In questo caso, la **sorgente** dell'onda è il sasso che viene gettato nello stagno; la perturbazione consiste nella **variazione del vettore spostamento**[1] di ciascun punto interessato dal passaggio dell'onda; il **mezzo materiale** in cui si propaga l'onda è l'acqua.

Possiamo così affermare che:

i. **qualcosa attraversa l'acqua**: la perturbazione ondosa;
ii. le singole particelle d'acqua **oscillano su e giù** lungo la verticale;
iii. **non vi è alcun trasporto di materia**.

[1] Il **vettore spostamento** di un punto è il vettore che ha la coda nel punto di equilibrio del punto e la punta nella posizione in cui si trova.

L'onda **trasporta però energia**: infatti, è in grado di mettere in movimento le particelle d'acqua e gli eventuali corpi, come il tappo di sughero, posti nello stagno[2].

3. L'onda generata perturbando l'estremo di una corda

Mettendo in movimento, lungo la verticale, con moto oscillatorio, l'estremo di una corda abbastanza lunga, disposta orizzontalmente, notiamo che un'onda attraversa la corda stessa.

La bellissima applet[3] che trovi a questo indirizzo

http://bama.ua.edu/~rschad/teaching/LABs/CH16%20waves/CH16%20moving%20wave.swf

visualizza l'onda che attraversa la nostra corda.

In questo caso, la **sorgente** dell'onda è la mano oppure il meccanismo (come nella applet citata) che mette in movimento la corda; la perturbazione consiste nella **variazione del vettore spostamento** di ciascun punto della corda interessato dal passaggio dell'onda (osserva, ad esempio, nella precedente applet, il punto P); il **mezzo materiale** in cui si propaga l'onda è la corda.

La frequenza di cui si parla nell'applet è la frequenza di vibrazione della sorgente. Tale frequenza è misurata in hertz (Hz), cioè in numero di oscillazioni al secondo.

Anche in questo caso, possiamo così affermare che:

i. **qualcosa attraversa la corda**: la perturbazione ondosa;
ii. le singole particelle di corda **oscillano su e giù** lungo la verticale;
iii. **non vi è alcun trasporto di materia**.

L'onda **trasporta però energia.**

---

[2] Il tappo di sughero acquista infatti energia cinetica e potenziale.
[3] Una applet è un programmino nel linguaggio di programmazione Java.

4. L'onda generata perturbando l'estremo di un pistone in un tubo

All'indirizzo

http://www.kettering.edu/~drussell/Demos/waves/wavemotion.html

è possibile, nella sezione "Longitudinal Waves", osservare quello che accade in un tubo pieno d'aria quando andiamo a mettere in oscillazione il pistone rosso, visibile sulla sinistra del tubo, con un movimento oscillatorio continuo lungo la direzione orizzontale.

Nel tubo è perfettamente visibile la **propagazione di un'onda**, che viaggia da sinistra verso destra.

Puoi fissare la tua attenzione sulla singola particella all'interno del tubo: essa oscilla intorno alla sua posizione di equilibrio **lungo la direzione orizzontale**.

In questo caso, la **sorgente** dell'onda è il dispositivo che mette in movimento il pistone; la perturbazione consiste nella **variazione del vettore spostamento** di ciascuna particella d'aria all'interno del tubo; il **mezzo materiale** in cui si propaga l'onda è l'aria.

Lo spostamento delle particelle d'aria provoca inevitabilmente una **variazione del valore della pressione**, al variare del tempo, in ogni punto del tubo, tanto che l'onda in questione è sostanzialmente un'**onda di pressione**[4].

Anche in questo caso, possiamo così affermare che:

i. **qualcosa attraversa il tubo**: la perturbazione ondosa;
ii. le singole particelle di aria **oscillano su e giù** lungo la direzione orizzontale e **varia la pressione** in ogni punto al variare del tempo;
iii. **non vi è alcun trasporto di materia**.

---

[4] In questo caso pertanto la grandezza fisica che varia è il vettore spostamento associato ad ogni singola particella d'aria oppure **equivalentemente** la pressione in quel punto. Diciamo *equivalentemente* poiché la prima situazione fisica implica la seconda e viceversa.

5. L’onda elettromagnetica

Nel caso di un’onda elettromagnetica, che **non ha bisogno di alcun mezzo materiale per propagarsi**, si propaga cioè anche nel **vuoto**, le grandezze che variano sono il **vettore campo elettrico e campo magnetico** in un punto dello spazio al variare del tempo.

In questo caso, la **sorgente** dell’onda è un qualunque dispositivo in grado di generare una tale onda[5].

6. Onde meccaniche

Un’**onda meccanica** è un’onda che **ha bisogno di un mezzo materiale** per propagarsi.

Le onde dei paragrafi 2. 3. 4. sono meccaniche.
Un’onda elettromagnetica non è meccanica.

7. Onde trasversali e longitudinali

Un’onda si dice **trasversale** se la caratteristica fisica che varia, **supposta di natura vettoriale**[6], oscilla **perpendicolarmente** rispetto alla propagazione dell’onda.

Le onde dei paragrafi 2. 3. 5. sono trasversali.

Un’applet di un’onda trasversale può essere apprezzata ai seguenti indirizzi:

http://surendranath.org/Applets/Waves/Twave01/Twave01Applet.html

http://www.kettering.edu/~drussell/Demos/waves/wavemotion.html

[5] Avremo modo di parlare delle sorgenti delle onde elettromagnetiche.

[6] La dobbiamo necessariamente supporre di natura vettoriale, **visto che oscilla**: come può infatti una grandezza scalare, e dunque numerica, oscillare perpendicolarmente o parallelamente ad una data direzione?

Un'onda si dice **longitudinale** se la caratteristica fisica che varia, **supposta di natura vettoriale**, oscilla **nella medesima direzione** rispetto alla propagazione dell'onda.

L'onda del paragrafo 4. è longitudinale.

8. Altri tipi di onde

Vi sono onde che **non sono né trasversali né longitudinali,** ma possono essere considerate un **misto delle due**.

Una splendida ed efficace descrizione scritta e supportata da applet è fornita alla pagina:

http://www.kettering.edu/~drussell/Demos/waves/wavemotion.html

laddove si parla di **onde d'acqua** e **onde superficiali di Rayleigh.**

9. Onde armoniche

Se la caratteristica y dell'onda che varia nel tempo segue la legge

$$y(t) = r \cdot sen(\omega t), \qquad (1)$$

l'onda si dice **armonica**.

L'onda del paragrafo 3. è armonica.

10. Il grafico della funzione[7] $y(t) = r \cdot sen(\omega t)$

La **legge oraria** di un punto che si muove di **moto armonico** è, come sappiamo, la legge (1):

$$y(t) = r \cdot sen(\omega t).$$

Il moto armonico è un **moto periodico,** caratterizzato dal **periodo**

[7] t è una variabile temporale e dunque $t \geq 0$.

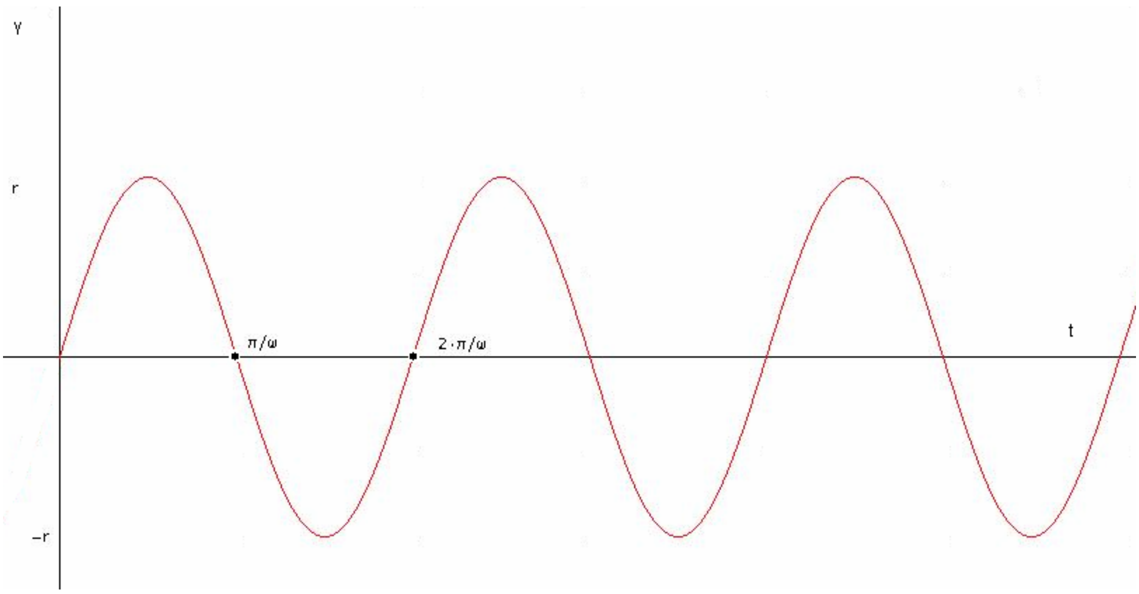
$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad (2)$$

dove ω è la **pulsazione** del moto.

Il **grafico** della **funzione sinusoidale** (1) è pertanto una **sinusoide**[8] che

- ha **ampiezza** r
- **periodo** $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Qui di seguito è rappresentato tale **grafico**:



[8] Chiamo **funzione sinusoidale** una funzione che ha la seguente equazione: $y(x) = r \cdot sen\left[\omega(x-\varphi)\right]$ e chiamo **sinusoide** il grafico di tale funzione.

Poiché la funzione seno assume valori compresi tra -1 e $+1$, cioè $-1 \le sen\left[\omega(x-\varphi)\right] \le +1$, si ha $-|r| \le y(x) \le |r|$.

L'**ampiezza** di tale funzione, cioè il più grande valore positivo toccato dalla variabile y, è dunque $|r|$.

La funzione sinusoidale **è una funzione periodica di periodo** $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Osserviamo che **il numero** φ che compare nell'espressione della funzione non ha nulla a che vedere né con il periodo né con l'ampiezza della funzione.

11. Grandezze associate ad un'onda armonica

Consideriamo un'**onda armonica**.

Allora, si danno le seguenti **definizioni**:

L'**ampiezza** dell'onda è il massimo scostamento, in valore assoluto, del modulo della grandezza che varia dal valore di tale grandezza nella situazione di equilibrio.

Il **periodo** dell'onda è il periodo di oscillazione della sorgente dell'onda.
In un periodo, l'onda disegna **una sua configurazione completa**.

La **frequenza** di un'onda è la frequenza di oscillazione della sorgente.

Tra la frequenza f ed il periodo T di un'onda intercorre la solita relazione: $f = \frac{1}{T}$.

Il **fronte d'onda** è formato, a seconda dei casi, dal punto o dai punti più avanzati interessati dalla perturbazione ondosa[9].

La **velocità** dell'onda è la velocità del suo fronte d'onda.

La **lunghezza d'onda** è lo spazio percorso dal fronte d'onda in un periodo.

Le grandezze ampiezza, periodo e lunghezza d'onda, applicate al caso di un'onda trasversale armonica, sono visibili nella applet che trovate al seguente indirizzo:

http://www.uwsp.edu/physastr/kmenning/flash/AF_1608.swf

In tal caso, ad esempio, l'ampiezza dell'onda è la misura della massima distanza che un punto della corda raggiunge dalla sua iniziale (prima del passaggio dell'onda)

[9] Più in là daremo una definizione un po' più allargata di fronte d'onda.

posizione di equilibrio; ed il fronte dell'onda è il punto della corda più avanzato interessato dalla perturbazione.

Nel caso di un'onda generata da un sasso gettato in uno stagno, invece, l'ampiezza dell'onda è data dall'altezza di una cresta; ed il fronte dell'onda è circolare.

12. La velocità di propagazione di un'onda armonica trasversale in una corda

La velocità di propagazione di un'onda armonica trasversale in una corda dipende essenzialmente da due caratteristiche della corda: la sua **rigidità** e la sua **densità lineare**, cioè il rapporto massa / lunghezza della corda.

In particolare, si può dimostrare che vale la relazione:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

dove v è la velocità della corda, T la sua **tensione**, che è associata alla sua rigidità ed, infine, μ la sua densità lineare.

Pertanto, più la corda è rigida e la sua massa per unità di lunghezza minore, più l'onda è in grado di viaggiare velocemente.

In generale, la velocità di un'onda meccanica **dipende dalle proprietà del mezzo** che attraversa.

13. Come si muove un punto di una corda attraversata da un'onda trasversale armonica?

Consideriamo la corda di estremo sinistro A, indefinitamente lunga[10] e un punto P di tale corda, posto a distanza[11] x da A:

[10] E' ovviamente un caso ideale.
[11] x è ovviamente la misura della distanza.

Supponiamo di mettere in movimento[12] l'estremo A lungo la direzione verticale, in modo che segua la legge oraria (1):

$$y(t) = r \cdot sen(\omega t).$$

$y(t)$ è così l'ordinata di A nell'istante t, cioè la posizione che il punto A occupa **lungo la verticale** in quell'istante.

Si forma quindi un'onda trasversale armonica che si propaga lungo la corda con velocità v.

Ancora una volta, ti invitiamo ad osservare l'applet al seguente indirizzo:

http://surendranath.org/Applets/Waves/Twave01/Twave01Applet.html

L'onda, partita da A, percorre gli x metri che separano tale punto da P, in $\frac{x}{v}$ secondi[13].

Il punto P oscillerà dunque con le stesse modalità di A[14], lungo la sua verticale, con un **ritardo** di $\frac{x}{v}$ secondi.

La sua **legge oraria** sarà pertanto:

$$y_P(t) = r \cdot sen\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right], \qquad (3)$$

[12] Con la mano oppure con un dispositivo meccanico.
[13] Il moto è rettilineo uniforme: dunque, $x = vt$.
[14] **L'onda trasmette quindi il moto armonico dell'estremo A a tutti i punti della corda**, i quali, lo rimarchiamo ancora una volta, oscillano esattamente, con un certo sfasamento temporale, come oscilla il punto A.

con la **condizione** che $t \geq \frac{x}{v}$.

Più precisamente, la **legge oraria** di P è la seguente:

$$y_P(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \frac{x}{v} \\ r \cdot sen\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] & \text{se} \quad t > \frac{x}{v} \end{cases} . \qquad (\text{ 3 bis })$$

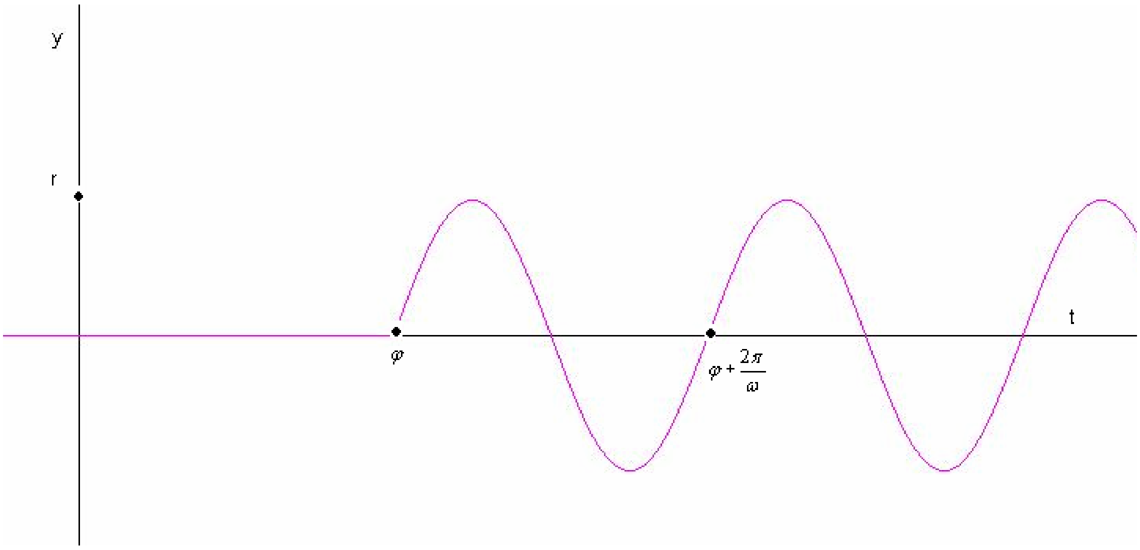
Infatti, prima dell'istante $t = \frac{x}{v}$ il punto P **è fermo** nella posizione $y_P = 0$.

14. Il grafico della funzione $y(t) = r \cdot sen\left[\omega(x - \varphi)\right]$

Ci limitiamo a considerare il caso in cui φ è **positivo**, cioè il caso corrispondente alla situazione fisica descritta dalla legge oraria (3 bis), nella quale $\varphi = \frac{x}{v}$.

Come si può evincere dalla digressione del paragrafo 13, il grafico della funzione sinusoidale (3 bis) è una sinusoide che ha le **medesime caratteristiche** della sinusoide trattata nel paragrafo (10), dunque ampiezza r e periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ma **traslata verso destra** di φ unità.

Se manteniamo **il significato fisico** della (3 bis), ecco il **grafico** della funzione (3 bis):



15. La funzione[15] χ

Introduciamo in questo paragrafo una funzione matematica, la funzione χ, utile per scrivere talune formule che descrivono alcuni aspetti del moto ondoso.

A tale proposito, sia $[a,b]$ un intervallo reale[16].

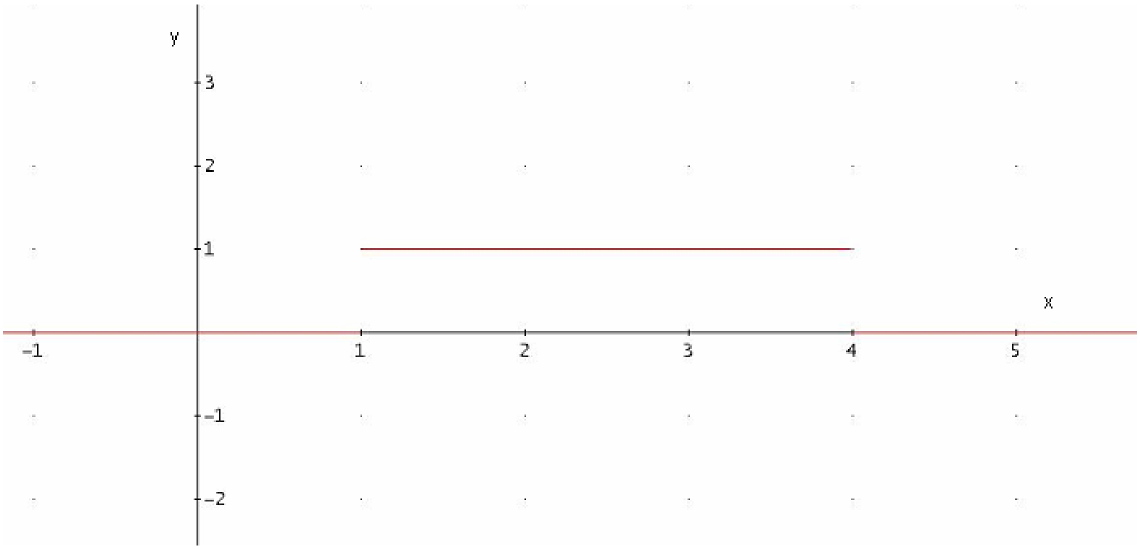
La **funzione reale** $\chi_{[a,b]}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed opera nel modo seguente:

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases} .$$

χ**,** dunque**,** attribuisce il valore 1 ad ogni punto dell'intervallo $[a,b]$ ed il valore 0 ad ogni punto che non appartiene a tale intervallo.

Ad esempio, qui di seguito abbiamo tracciato il grafico della funzione $y = \chi_{[1,4]}(x)$:

[15] Si legge: funzione *chi*.
[16] a oppure b o entrambi possono essere uguali anche ad ∞.



16. La legge oraria del moto di un punto di una corda, attraversata da un'onda trasversale armonica, scritta utilizzando la funzione χ

La legge oraria (3) , con la sua limitazione $t \geq \frac{x}{v}$, è definita su $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ [17] e, mediante l'utilizzo della funzione χ , si può riscrivere nel modo seguente:

$$y_P(t) = r \cdot sen\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] \cdot \chi_{\left[\frac{x}{v},+\infty\right]}(t) \qquad (4).$$

La funzione (4) dice che il punto P è fermo negli istanti che precedono l'istante $t = \frac{x}{v}$: infatti, $\chi_{\left[\frac{x}{v},+\infty\right]}(t) = 0$ se $0 \leq t < \frac{x}{v}$.

Mentre, se $t \geq \frac{x}{v}$, la posizione del punto P coincide con la (3): in tal caso, infatti, $\chi_{\left[\frac{x}{v},+\infty\right]}(t) = 1$.

[17] Il dominio dipende ovviamente dal fatto che t è una variabile temporale.

17. Un esempio di moto di un punto di una corda di una corda attraversata da un'onda trasversale armonica

Applichiamo la formula (4) nel caso in cui: $r = 1$ m, $\omega = \pi$ rad/s, $x = 10$ m e $v = 5$ m/s.

Pertanto, l'ampiezza di oscillazione della sorgente[18] è dunque 1 m ed il periodo in cui A compie un'oscillazione completa è $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2$ s.

In questo caso, il punto P si trova ad una distanza di 10 m dall'estremo A e la **velocità dell'onda** è di 10 m/s.

La **legge oraria** del punto P è così:

$$y_P(t) = sen\left[\pi(t-2)\right] \cdot \chi_{[2,+\infty]}(t). \qquad (5)$$

Rendiamo più semplice la (5).

Si ha:

$$y_P(t) = sen(\pi t - 2\pi) \cdot \chi_{[2,+\infty]}(t)$$

e, poiché **il seno è una funzione periodica** di periodo 2π, si ottiene:

$$y_P(t) = sen(\pi t) \cdot \chi_{[2,+\infty]}(t). \qquad (6)$$

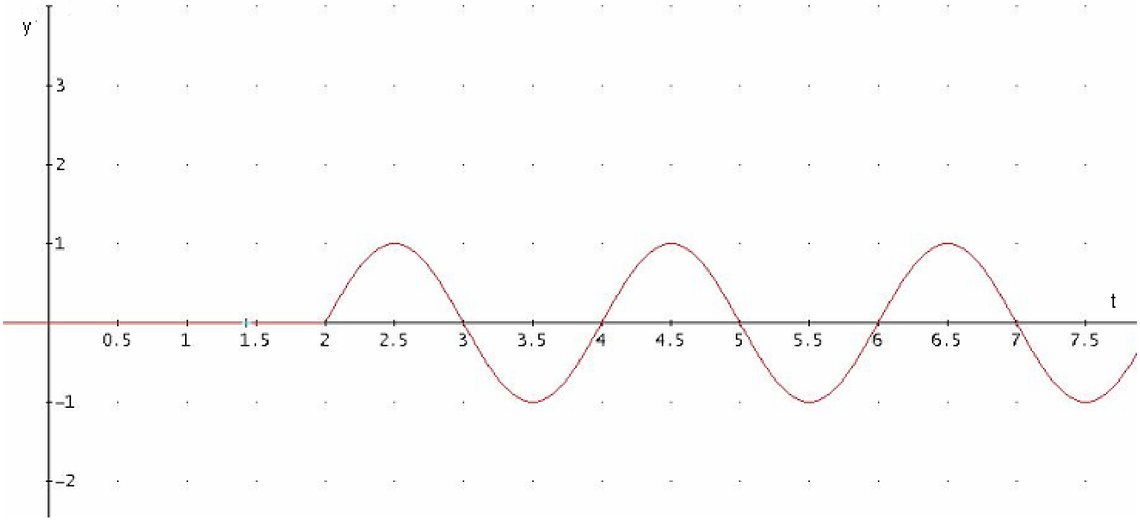
Il punto P compie, così come l'estremo A, una oscillazione completa in 2 s.

Proviamo, usufruendo della (6), a **determinare la posizione** di P, nell'intervallo temporale da 2 a 4 secondi[19], **ogni 0.1 secondi**:

[18] Dunque, del punto A.
[19] Dunque, nei primi 2 s del suo movimento.

t	$y(t)$
2.0	0.000
2.1	0.309
2.2	0.587
2.3	0.809
2.4	0.951
2.5	1.000
2.6	0.951
2.7	0.809
2.8	0.587
2.9	0.309
3.0	0.000
3.1	-0.309
3.2	-0.587
3.3	-0.809
3.4	-0.951
3.5	-1.000
3.6	-0.951
3.7	-0.809
3.8	-0.587
3.9	-0.309
4.0	0.000

Qui di seguito, riportiamo il **grafico** della funzione (5):



18. L'equazione dell'onda

La relazione

$$y_P(t) = r \cdot sen\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] \cdot \chi_{\left[\frac{x}{v}, +\infty\right]}(t) \qquad (4)$$

si presta anche ad un'altra interessante **interpretazione**.

Se consideriamo un istante t **preciso** e supponiamo che x sia **variabile**, il numero y_P **dipende** non più da t ma dalla variabile x.

Possiamo pertanto scrivere[20]:

$$y(x) = r \cdot sen\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] \qquad (7)$$

La funzione (7) ci fornisce la posizione sulla verticale **di tutti i punti della corda** e così il suo grafico è **la fotografia della corda** nell'istante t.

[20] Nota che al posto di y_P compare y: il singolo punto P infatti non ha più senso, essendo la (5) la posizione sulla verticale di **tutti i punti della corda**.

Fatta salva, ovviamente, la **condizione** $x \leq t \cdot v$: infatti, in t secondi **il fronte dell'onda**, cioè il punto più avanzato della corda, ha percorso $t \cdot v$ metri.

Utilizzando la funzione χ, la funzione (7) può allora essere riscritta nella forma più corretta:

$$y(x) = r \cdot sen\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] \cdot \chi_{[0,t \cdot v]}(x) \qquad (8)$$

La funzione (8) prende il nome di **equazione dell'onda**.

19. Il grafico dell'onda in successivi istanti in un caso particolare

Consideriamo una perturbazione ondosa che presenti le seguenti caratteristiche: $r = 1 \text{ m}$, $\omega = \pi$ rad/s, $x = 10 \text{ m}$ e $v = 10 \text{ m/s}$.

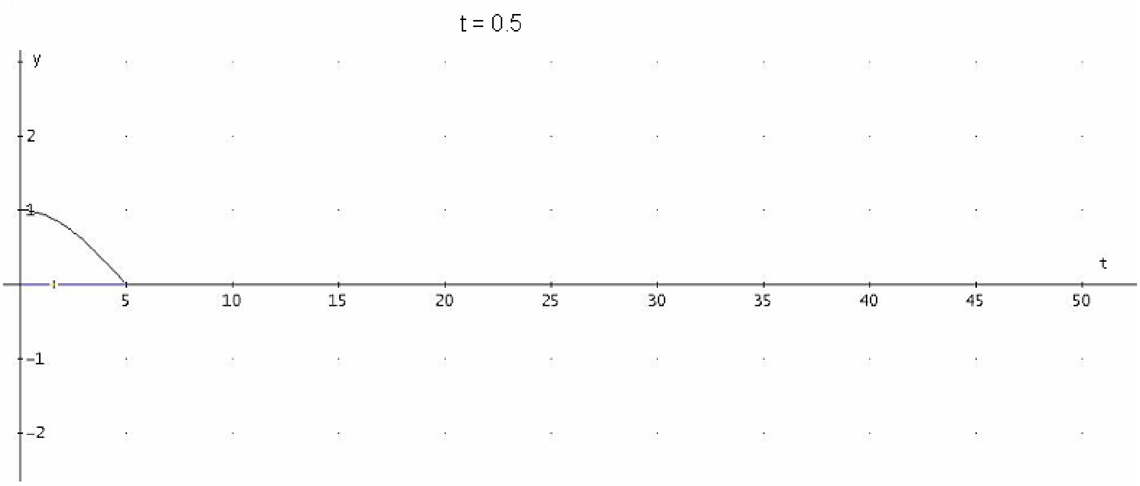
In questa situazione, l'**equazione dell'onda** (8) diventa:

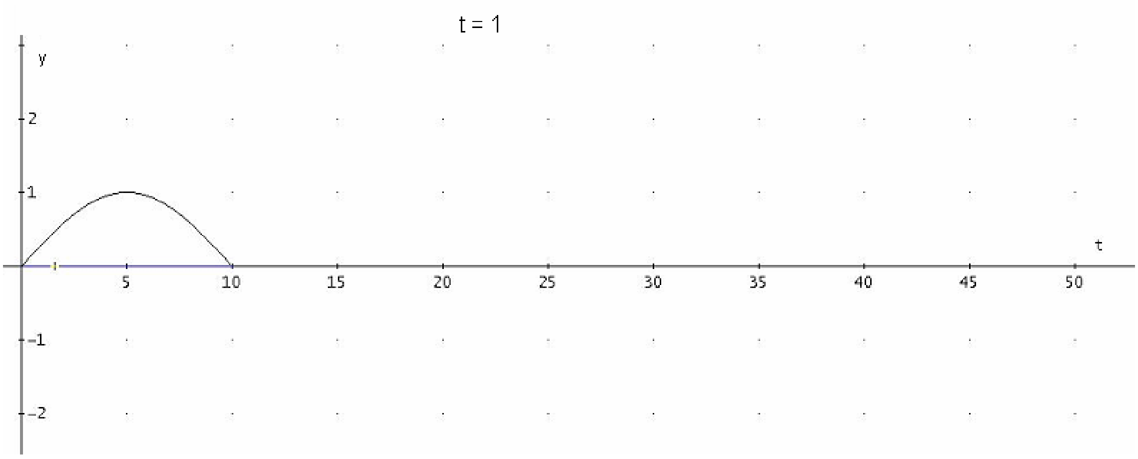
$$y(x) = sen\left[\pi\left(t - \frac{x}{10}\right)\right] \cdot \chi_{[0,10t]}(x) \qquad (9).$$

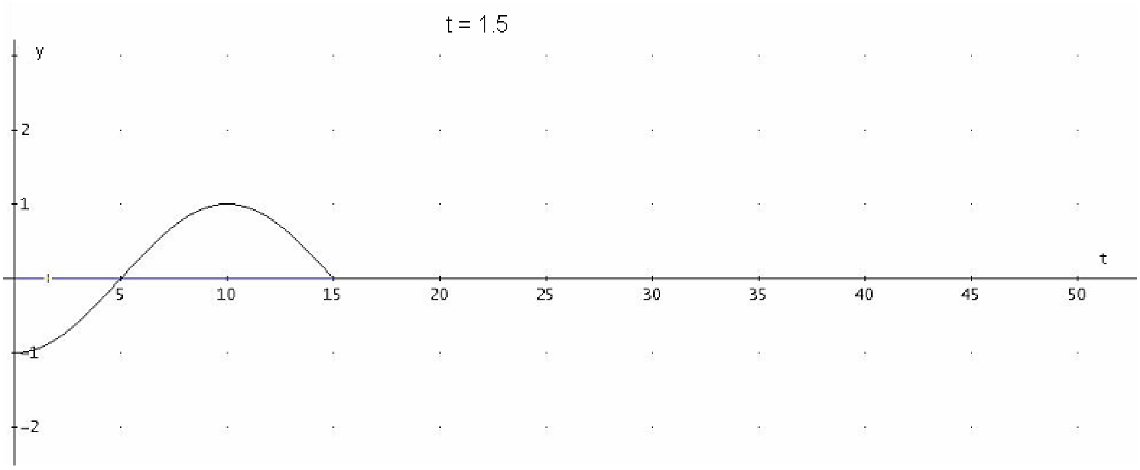
Proviamo ad assegnare al parametro t alcuni valori e a disegnare la **fotografia dell'onda** corrispondente a tali valori.

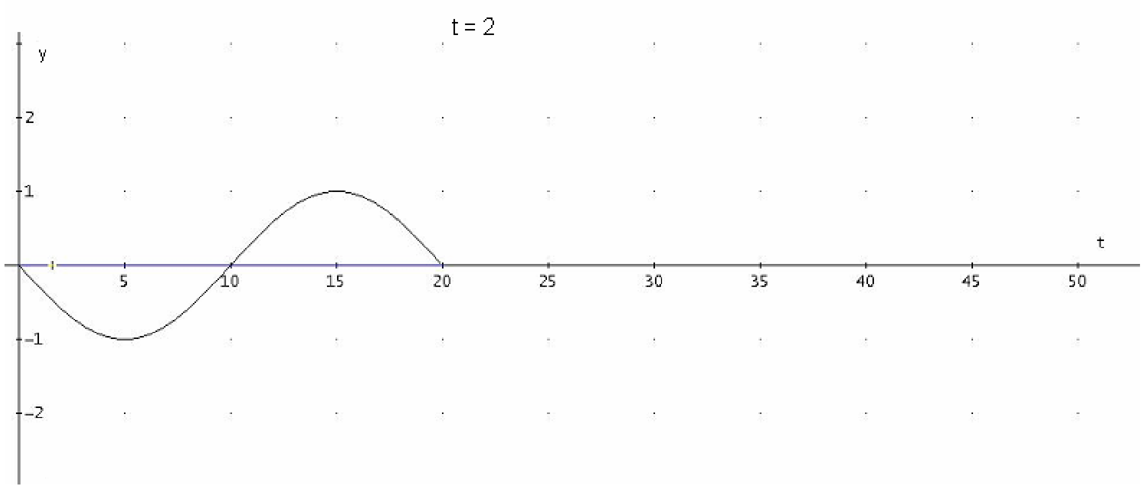
Poiché il periodo dell'onda è di 2 s, ci pare opportuno **fotografare l'onda**[21], a partire dall'istante iniziale $t = 0$, **ogni** 0.5 s **fino all'istante** $t = 4$.

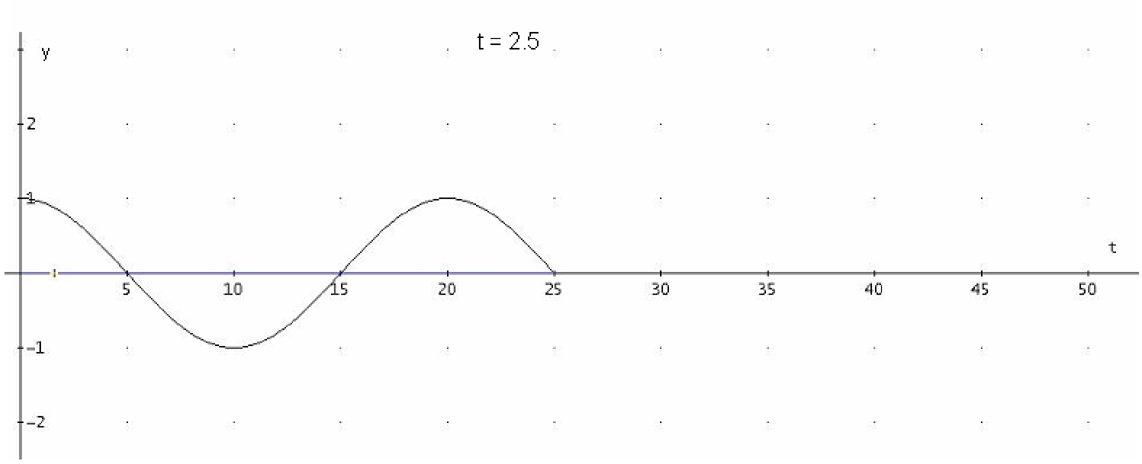
[21] **Nelle immagini che seguono sull'asse delle ascisse è erroneamente indicata la variabile t: ovviamente, la variabile corretta è x.**

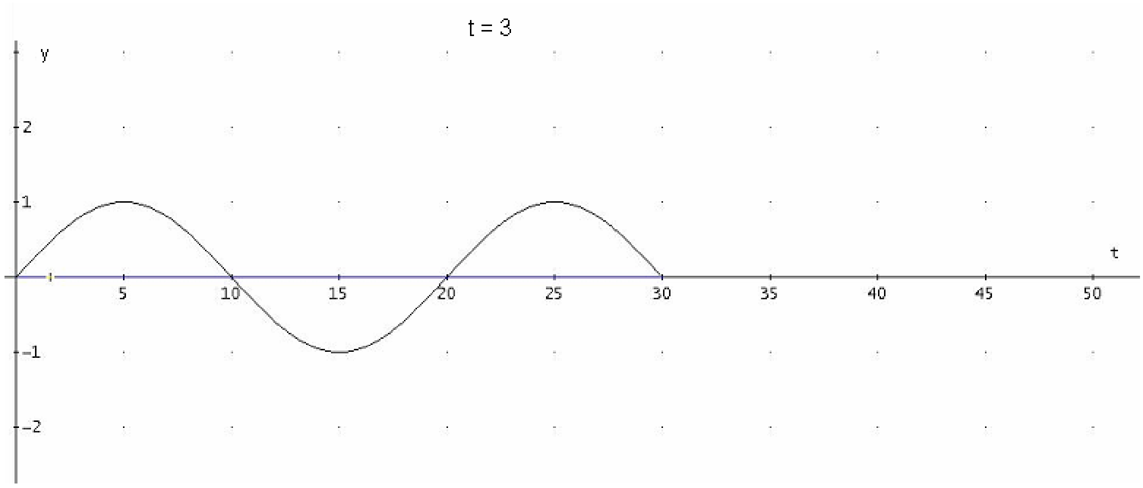

t = 0.5
y
2
1
t
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
−1
−2

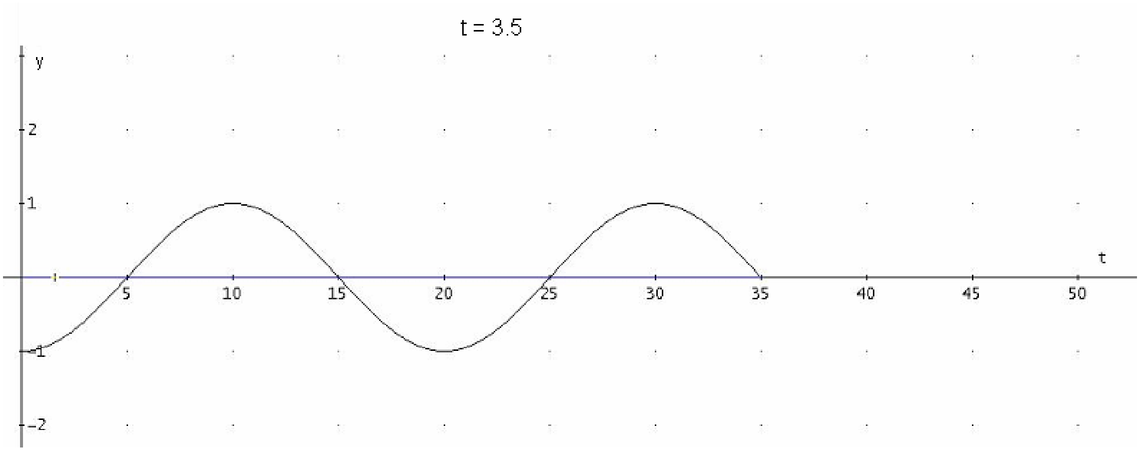

t = 1
y
2
1
t
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
−1
−2

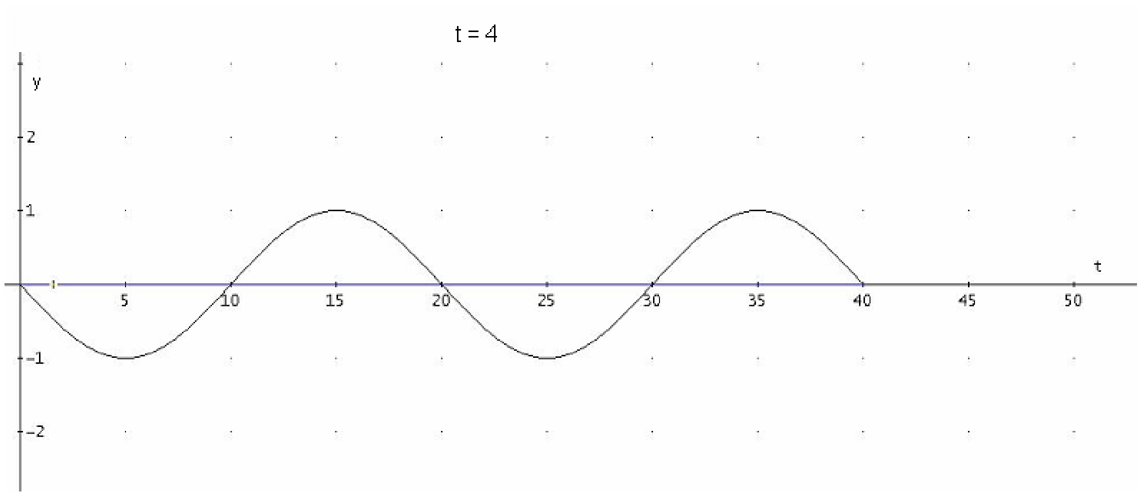

t = 1.5
y
2
1
t
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
−1
−2


t = 2
y
2
1
−1
−2
t
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50


t = 2.5
y
2
1
−1
−2
t
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50


t = 3
y
2
1
−1
−2
t
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50





Nelle precedenti fotografie, **è ben visibile la propagazione dell'onda**.

20. Interferenza di onde

Immergiamo in un ondoscopio[1] contenente acqua una punta metallica, la quale oscilla perpendicolarmente alla superficie del liquido, seguendo la legge del moto armonico[2].

Si forma allora un'onda circolare che attraversa lo specchio d'acqua della nostra bacinella.

Fermiamo, quindi, il movimento della punta e lasciamo quietare l'acqua.

Immergiamo nello stesso ondoscopio, una seconda punta metallica, ad una distanza d dalla prima, che oscilla anch'essa perpendicolarmente alla superficie del liquido, con le stesse modalità della prima.

Si forma una seconda onda circolare che, come la prima, attraversa lo specchio d'acqua della bacinella.

Fermiamo anche il movimento della seconda punta, lasciando quietare l'acqua.

Facciamo ora partire **contemporaneamente** le due punte, supponendo che **oscillino in fase**, cioè che vengano immerse e riemerse contemporaneamente.

Si formano due onde che, propagandosi nello stesso specchio d'acqua, ad un certo punto *entrano in collisione*.

Fissiamo la nostra attenzione su un pezzo di sughero molto piccolo, assimilabile ad un punto P, posto all'interno della bacinella.

Come oscillerà il punto P ? quali saranno gli **effetti** delle **due** onde su tale punto?

---

[1] Un ondoscopio non è nient'altro che una vaschetta, che contiene un liquido. A tale proposito, clicca su http://it.wikipedia.org/wiki/Ondoscopio.
[2] A tale proposito, ovviamente, si utilizza un qualche dispositivo meccanico.

Ebbene, si può **empiricamente** osservare che se indichiamo con

- $\overrightarrow{y_1}$ il vettore posizione del punto P relativo al passaggio della prima onda[3]
- $\overrightarrow{y_2}$ il vettore posizione del punto P relativo al passaggio della seconda onda[4]
- $\vec{y}$ il vettore posizione del punto P relativo al passaggio delle due onde **contemporaneamente**,

si ha

$$\vec{y}(t) = \overrightarrow{y_1}(t) + \overrightarrow{y_2}(t).$$

Cioè, in altri termini, **istante per istante**, la posizione di P sulla sua verticale si ottiene **sommando algebricamente**, dunque con attenzione al **segno**, le ordinate che P avrebbe al passaggio della prima e della seconda onda.

Il fenomeno che ha luogo quando due onde si incontrano prende il nome di **interferenza** o **sovrapposizione,** ed il principio appena esposto di **Principio di sovrapposizione delle onde.**

Facciamo esplicitamente notare che la *collisione* di due onde è un fenomeno che ha **caratteristiche ben diverse** dalla collisione, ad esempio, di due biglie di acciaio: in questo secondo caso, infatti, le due biglie **urtano** tra loro; mentre appare assolutamente improprio parlare di **urto** tra due onde.

21. Una nuova espressione per l'equazione dell'onda

Talvolta è opportuno porre l'equazione dell'onda

$$y(x) = r \cdot sen\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] \qquad (7)$$

in una forma diversa[5].

---

[3] In assenza, ovviamente, della seconda onda.
[4] In assenza, ovviamente, della prima onda.

Indichiamo con T e λ, rispettivamente, il **periodo** e la **lunghezza d'onda** della nostra perturbazione.

Poiché $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e $v = \frac{\lambda}{T}$, si ha

$$y(x) = r \cdot sen\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{xT}{\lambda}\right)\right]$$

ed infine:

$$y(x) = r \cdot sen\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \qquad (10)$$

La (10) ha il vantaggio di far comparire il **periodo** T e la **lunghezza d'onda** λ nell'equazione dell'onda.

La quale assume allora la forma completa:

$$y(x) = r \cdot sen\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \cdot \chi_{[0,t\cdot v]}(x) \qquad (11)$$

Utilizzando i calcoli esposti in questo paragrafo, è possibile rielaborare la formula (4) ed ottenere una nuova espressione per la **legge oraria** con cui oscilla il generico punto P, posto a distanza x dall'estremo A:

$$y_P(t) = r \cdot sen\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \cdot \chi_{\left[\frac{x}{v},+\infty\right)}(t) \qquad (12).$$

22. L'interferenza di onde circolari

L'applet che trovi al seguente indirizzo

http://www.walter-fendt.de/ph14e/interference.htm

illustra bene, attraverso una visione dall'alto, la situazione fisica descritta nel paragrafo 20.

---

[5] Rammentiamo che $x \le t \cdot v$.

Dalle due sorgenti, le nostre punte metalliche, che dalla prospettiva scelta ci appaiono come due puntini neri[6], si dipanano le onde circolari in figura.

Le circonferenze nere corrispondono alle **creste**[7] della perturbazione ondosa, mentre quelle grigie alle **gole**[8].

Se osservi con attenzione la figura, vedrai che due creste o due gole si incontrano sempre sulle **linee rosse** tracciate nell'applet, mentre una gola ed una cresta si incontrano sempre sulle **linee blu**.

A cosa corrispondono queste **linee rosse e blu**?

Per rispondere a questa domanda, dobbiamo ricorrere al **Principio di sovrapposizione** delle onde.

Ebbene, laddove si incontrano due creste o due gole, si formeranno una cresta ancora più alta[9] o una gola ancora più profonda[10]; mentre, nei luoghi in cui si incontrano una cresta ed una gola, vi saranno zone d'acqua imperturbate, poiché la cresta e la gola, sommandosi algebricamente, si annullano.

Chiamiamo **punti di interferenza costruttiva** quei punti dello specchio d'acqua in cui le due onde che si incontrano danno luogo ad un'onda la cui ampiezza è maggiore rispetto alle ampiezze delle onde incidenti; **punti di interferenza distruttiva** quei punti dello specchio d'acqua in cui le due onde che si incontrano danno luogo ad un'onda la cui ampiezza è minore rispetto alle ampiezze delle onde incidenti.

---

[6] Ben visibili in figura.
[7] Una **cresta** è il luogo dei punti che vibrano con ampiezza massima.
[8] Una **gola** è il luogo dei punti che vibrano con ampiezza minima.
[9] La cui ampiezza è la somma delle ampiezze delle due creste che si incontrano.
[10] La cui ampiezza è la somma delle ampiezze delle due creste che si incontrano.

In particolare, **le linee rosse** rappresentano, secondo la definizione appena data, **punti di interferenza costruttiva massima**, cioè di massima ampiezza possibile; e le **linee blu punti di interferenza costruttiva minima**, cioè di minima ampiezza possibile.

Tra le due linee colorate vi sono punti che, **a seconda della loro collocazione**, sono punti di interferenza costruttiva o distruttiva.

23. Lo studio matematico dell'interferenza delle onde circolari descritta nel paragrafo 20

Nella precedente applet, compaiono due parametri della figura che possono essere variati:

1. la **distanza** tra le due **sorgenti** (sources) ;
2. la **lunghezza d'onda** delle due onde incidenti (wavelenght).

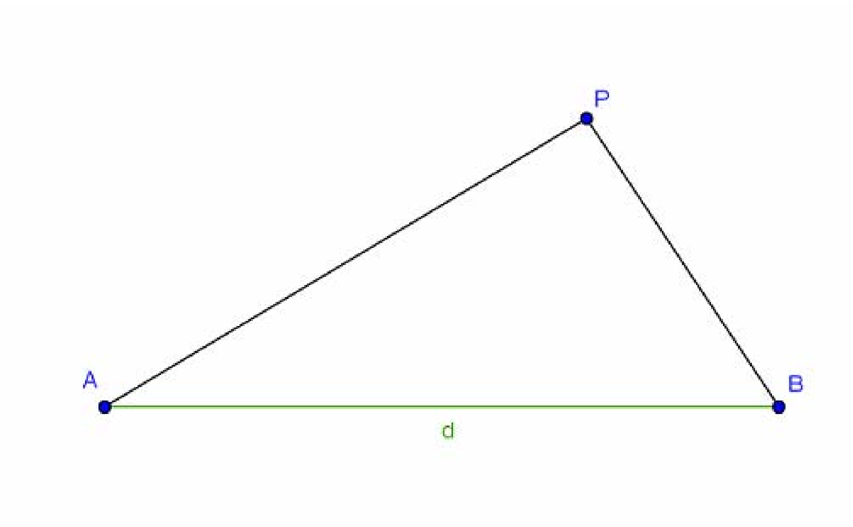
Inoltre, vi è un puntino nello specchio d'acqua, colorato di viola, che è unito alle due sorgenti da due segmenti.

E' possibile trascinare questo punto, che indicheremo con la lettera P, tenendo premuto il tasto sinistro del mouse.

Se osservi con attenzione, sulla parte inferiore della figura compare il numero Δs: esso è la differenza in valore assoluto delle misure delle distanze del punto P dalle due sorgenti, **espressa in frazioni di lunghezza d'onda**[11].

Per chiarire ulteriormente cosa rappresenti il numero Δs, osserva la figura che segue in cui sono rappresentati il punto P e le due sorgenti A e B:

[11] Assumendo cioè **la lunghezza d'onda come unità di misura**.



Allora

$$\Delta s = \left| \overline{AP} - \overline{BP} \right| \cdot \lambda \qquad (13),$$

dove λ è la lunghezza d'onda.

Abbiamo ora intenzione di utilizzare **un po' di matematica** per:

1. determinare con precisione **quali sono i punti** dello specchio d'acqua in cui **l'interferenza costruttiva o distruttiva è massima**;
2. scoprire **quale tipo di curva** si cela dietro le **linee rosse e blu**.

24. Punti di interferenza costruttiva o distruttiva massima nel caso delle due onde circolari (Parte Prima)

Supponiamo che dalle due sorgenti A e B, che vibrano **in fase**, partano due perturbazioni ondose di periodo T e lunghezza d'onda λ.

La distanza[12] tra le due sorgenti è d.
Consideriamo un punto P che disti x_1 dalla sorgente A e x_2 dalla sorgente B.

Il passaggio della prima onda, quella uscente da A, obbliga P ad oscillare seguendo la legge oraria:

---

[12] Sarebbe meglio dire, la misura della distanza.

$$y_1(t) = r \cdot sen\left[\omega\left(t - \frac{x_1}{v}\right)\right] \cdot \chi_{\left[\frac{x_1}{v}, +\infty\right)}(t). \qquad (14)$$

Il passaggio della seconda onda, quella uscente da B, obbliga P ad oscillare seguendo la legge oraria:

$$y_2(t) = r \cdot sen\left[\omega\left(t - \frac{x_2}{v}\right)\right] \cdot \chi_{\left[\frac{x_2}{v}, +\infty\right)}(t). \qquad (15)$$

Nella (14) e nella (15), v indica ovviamente la velocità delle due onde[13].

Il **Principio di sovrapposizione**, ci dice quindi che il punto P, investito dalle due onde, oscilla seguendo la legge oraria, all'apparenza complessa,

$$y(t) = r \cdot sen\left[\omega\left(t - \frac{x_1}{v}\right)\right] \cdot \chi_{\left[\frac{x_1}{v}, +\infty\right)}(t) + r \cdot sen\left[\omega\left(t - \frac{x_2}{v}\right)\right] \cdot \chi_{\left[\frac{x_2}{v}, +\infty\right)}(t) \ . \qquad (16)$$

Iniziamo col rendere più semplice la (16), eliminando le due espressioni χ.

A tale proposito, osserviamo che la prima onda raggiunge il punto P dopo $\frac{x_1}{v}$ secondi e la seconda dopo $\frac{x_2}{v}$ secondi.

Se con $\bar{t}$ indichiamo **l'istante più grande** tra $\frac{x_1}{v}$ e $\frac{x_2}{v}$, ecco che **dopo tale istante** entrambe le perturbazioni sono giunte in P, il quale oscilla secondo la legge:

$$y(t) = r \cdot sen\left[\omega\left(t - \frac{x_1}{v}\right)\right] + r \cdot sen\left[\omega\left(t - \frac{x_2}{v}\right)\right] \ . \qquad (17)$$

---

[13] Onde evitare fraintendimenti, **la velocità delle onde che attraversano un mezzo è sempre la stessa e dipende dalle caratteristiche del mezzo stesso**. Nel paragrafo 11, abbiamo trattato ad esempio la velocità con cui un'onda attraversa una corda.

Scriviamo la legge oraria (17) nella forma:

$$y(t) = r \cdot \left\{ sen\left[\omega\left(t - \frac{x_1}{v} \right) \right] + sen\left[\omega\left(t - \frac{x_2}{v} \right) \right] \right\}. \qquad (18)$$

Nella relazione (18), all'interno delle parentesi *graffe*, compare una espressione che si presenta come **una somma di due seni**:

$$sen\left[\omega\left(t - \frac{x_1}{v} \right) \right] + sen\left[\omega\left(t - \frac{x_2}{v} \right) \right] \ . \qquad (19)$$

E' possibile manipolare la relazione (19) e porla in una nuova forma, funzionale al raggiungimento del nostro obbiettivo, utilizzando una delle **formule goniometriche** note con il nome di **formule di prostaferesi**.

25. Una formula di prostaferesi: la somma di due seni

Una delle **formule di prostaferesi** afferma che

$$sen(\alpha) + sen(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \ . \qquad (20)$$

La formula (20) consente di esprimere la somma di due seni come prodotto dei tre termini che compaiono nel secondo membro dell'uguaglianza.

26. Punti di interferenza costruttiva o distruttiva massima nel caso delle due onde circolari (Parte Seconda)

Comparando le formule (19) e (20), si ha:

$$\alpha = \omega\left(t - \frac{x_1}{v} \right)$$
$$\beta = \omega\left(t - \frac{x_2}{v} \right).$$

Calcoliamo $\alpha + \beta$ e $\alpha - \beta$:

$$\alpha+\beta=2\omega t-\omega\frac{x_1}{v}-\omega\frac{x_2}{v}=\omega\cdot\left(2t-\frac{x_1+x_2}{v}\right)$$
$$\alpha-\beta=\omega\frac{x_2}{v}-\omega\frac{x_1}{v}=\frac{\omega}{v}\cdot\left(x_2-x_1\right) \qquad (21)$$

Modifichiamo l'espressione (19) utilizzando le formule (20) e (21):

$$sen\left[\omega\left(t-\frac{x_1}{v}\right)\right]+sen\left[\omega\left(t-\frac{x_2}{v}\right)\right]=$$
$$2\cos\left[\frac{\omega}{2v}\cdot\left(x_2-x_1\right)\right]\cdot sen\left[\omega\cdot\left(t-\frac{x_1+x_2}{2v}\right)\right] \qquad (22)$$

La legge oraria (18) con cui oscilla il punto P dopo l'istante $\bar{t}$, utilizzando la (22), diviene così:

$$y(t)=2r\cdot\cos\left[\frac{\omega}{2v}\cdot\left(x_2-x_1\right)\right]\cdot sen\left[\omega\cdot\left(t-\frac{x_1+x_2}{2v}\right)\right] \qquad (23)$$

Ti facciamo osservare che la quantità

$$2r\cdot\cos\left[\frac{\omega}{2v}\cdot\left(x_2-x_1\right)\right] \qquad (24)$$

è indipendente dal tempo t ed è dunque un numero.

La funzione (23) **è pertanto una funzione sinusoidale[14],** la cui sinusoide, che ne è il grafico, presenta le seguenti **caratteristiche**:

1. **ampiezza** (24);
2. **periodo** $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$;
3. **numero** $\varphi=\dfrac{x_1+x_2}{2v}$.

[14] Vedi la nota 5.

I **punti di interferenza costruttiva massima** si ottengono rendendo massima l'ampiezza dell'oscillazione di P.

Si tratta allora di **rendere massima l'espressione (24)**.

A tal fine, dovrà essere:

$$\cos\left[\frac{\omega}{2v}\cdot\left(x_2 - x_1\right)\right] = \pm 1 \qquad (25),$$

nel qual caso l'ampiezza dell'onda risultante vale $2r$.

Dal punto di vista matematico, si tratta di risolvere l'**equazione goniometrica elementare** (25), equazione che ammette le **soluzioni**[15]:

$$\frac{\omega}{2v}\cdot\left(x_2 - x_1\right) = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}. \qquad (26)$$

Pertanto,

$$x_2 - x_1 = 2k\pi\cdot\frac{v}{\omega}. \qquad (27)$$

Poiché

$$\frac{v}{\omega} = \frac{\lambda}{T} : \frac{2\pi}{T} = \frac{\lambda}{2\pi}, \qquad (28)$$

sostituendo la (28) nella (27), otteniamo:

$$x_2 - x_1 = 2k\pi\cdot\frac{v}{\omega} = 2k\pi\cdot\frac{\lambda}{2\pi}$$

ed infine,

$$x_2 - x_1 = k\lambda. \qquad (29)$$

Parafrasando la (29), concludiamo che un punto P è **un punto di interferenza costruttiva massima se e solo se la differenza delle sue distanze è un multiplo positivo o negativo della lunghezza d'onda λ.**

---

[15] Sono in numero infinito.

Allo stesso modo si possono determinare **i punti di interferenza distruttiva massima**, imponendo la condizione:

$$\cos\left[\frac{\omega}{2v}\cdot\left(x_2 - x_1\right)\right] = 0 \qquad (30).$$

I calcoli della (30) conducono alle **soluzioni**:

$$x_2 - x_1 = \left(\frac{1}{2} + k\right)\lambda\,. \qquad (31)$$

Ebbene, i punti delle **linee rosse** dell'applet sono tali da soddisfare la condizione (29), mentre i punti delle **linee blu** dell'applet sono tali da soddisfare la condizione (31): abbiamo **la conferma matematica** del fatto che i primi sono punti di **interferenza costruttiva massima**, mentre i secondi sono punti di **interferenza distruttiva massima**.

Puoi constatare direttamente, sull'applet, questo fatto: trascina col mouse il punto viola su una delle curve colorate e leggi sul fondo dell'immagine il valore del numero $\Delta s = \left|x_2 - x_1\right|$.

27. Che curve sono le linee rosse e blu dell'applet dell'interferenza?

Le **coniche** emergono in maniera naturale in ambito fisico: sono **ellissi** le orbite dei pianeti intorno al Sole e **parabole** le traiettorie dei corpi[16] lanciati con una certa inclinazione[17] e velocità rispetto all'orizzontale.

Sono invece **iperboli** le linee rosse e blu di massima interferenza costruttiva e distruttiva dell'applet.

---

[16] In assenza di attrito.
[17] Inferiore a 90°.

Rammentiamo che l'**iperbole** è una **curva piana**[18] che ha la seguente caratteristica: i suoi punti sono tali che la differenza, in valore assoluto, delle loro distanze da due punti fissi, detti **fuochi**, è costante.

Se riscriviamo la (29) nel modo seguente:

$$|x_2 - x_1| = k\lambda, \qquad k \in \mathbb{N} \qquad (32),$$

ci accorgiamo subito che la curva di interferenza costruttiva massima **è un'iperbole che ha i suoi fuochi nelle due sorgenti delle onde**.

Che sia un'iperbole poi discende immediatamente dalla definizione di questa conica: la differenza, in valore assoluto, delle distanze di un punto dalle due sorgenti è costante[19].

In un piano cartesiano ortogonale, il cui asse delle ascisse passa per le due sorgenti e l'origine è posizionata nel punto medio del segmento i cui estremi sono le già citate sorgenti, le equazioni delle iperboli di massima interferenza costruttiva sono:

$$\frac{4x^2}{k^2\lambda^2} - \frac{4y^2}{d^2 - k^2\lambda^2} = 1 \qquad (33),$$

con la condizione che $k\lambda < d$.

Nella (33), $k \in \mathbb{N}$, λ è la lunghezza d'onda comune alle due perturbazioni ondose, d è la distanza tra le due sorgenti.

Proviamo ad impostare, nell'applet, la distanza delle due sorgenti a $10\ \text{cm}$ e la lunghezza d'onda a 4 cm.

Le equazioni delle iperboli di massima interferenza costruttiva diventano:

$$\frac{x^2}{4k^2} - \frac{y^2}{25 - 4k^2} = 1 \qquad (34),$$

con la condizione che $4k^2 < 25$.

---

[18] Che giace cioè in un piano.

[19] Ti facciamo esplicitamente notare che, fissato k, il numero $k\lambda$ è costante.

Pertanto, visto che k è un parametro naturale, **a k possiamo attribuire i valori 1 e 2**.

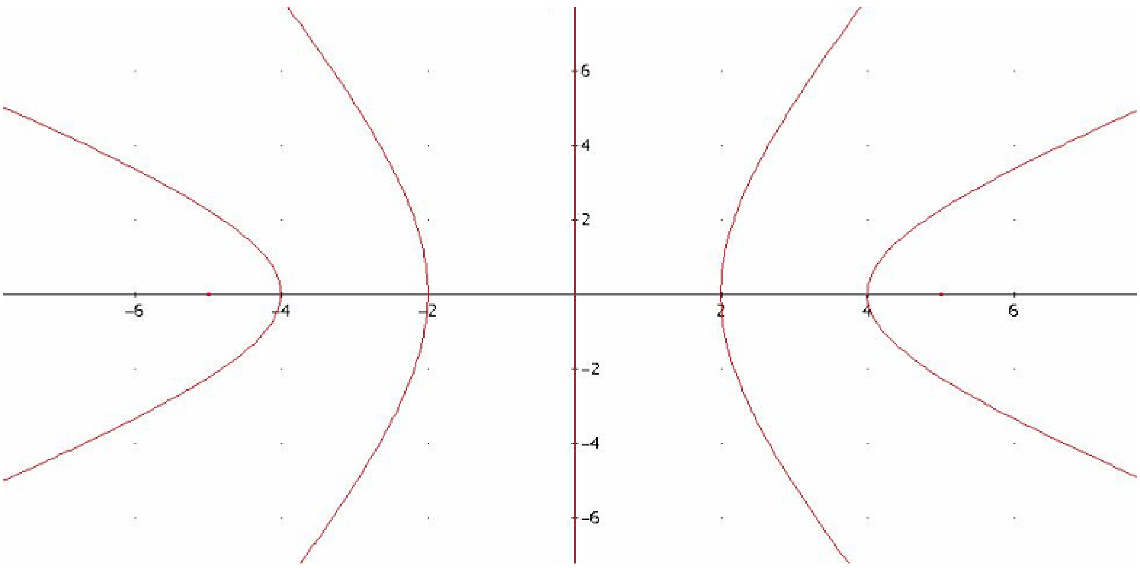
Se $k=1$ otteniamo l'iperbole di equazione:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{21}=1 \qquad (35);$$

Se $k=2$ otteniamo l'iperbole di equazione:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \qquad (36).$$

Ecco tracciate, nel grafico che segue, le due iperboli:



Nel grafico puoi inoltre vedere le **due sorgenti**, che hanno coordinate $(5,0)$ e $(-5,0)$.

Ed infine puoi notare come sia stato colorato di rosso, esattamente come nell'applet, anche l'**asse delle ordinate**: tale retta è una retta di interferenza massima costruttiva.
Sai dire perché?