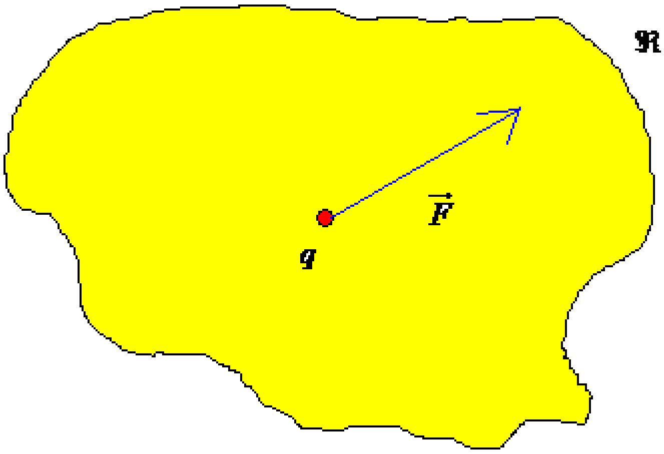
**Il campo elettrico**

---

## 1. Il campo elettrico

Diciamo che in una regione $\Re$ **c'è un campo elettrico** se, posta una carica puntiforme $q$ in $\Re$, su tale carica agisce una forza $\vec{F}$ **di natura elettrica**.




La carica $q$, che prende il nome di **carica di prova**, viene convenzionalmente scelta **positiva** e **molto piccola** in modo tale da non alterare le caratteristiche del campo.

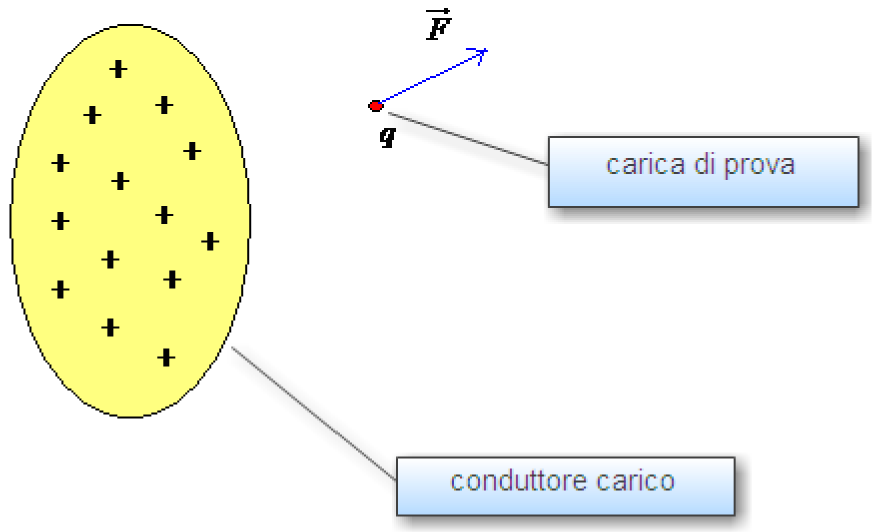
Facciamo esplicitamente notare che, in questo contesto, non ha alcuna importanza sapere quale sia la **sorgente** del campo elettrico.

## 2. Le sorgenti del campo elettrico

Sono, ad esempio, **sorgenti** di un campo elettrico: una carica puntiforme ( negativa oppure positiva ); un sistema di $n$ cariche; un **conduttore** carico.

Nella figura che segue, un **conduttore,** di forma ovale e carico positivamente, genera nella regione circostante un campo elettrico, che si può facilmente rilevare utilizzando la carica di prova $q$.

La carica, come ci aspettiamo, essendo positiva, viene respinta nella direzione indicata dal vettore $\vec{F}$.




### 3. Lo studio delle caratteristiche del campo elettrico: il vettore $\vec{E}$

Possiamo dire di **conoscere il campo elettrico** presente in una regione $\Re$ se sappiamo con precisione cosa accade ad una **generica** carica $q$ posta in un punto **qualsiasi** $P$ di quella regione.

Una possibile descrizione dell'**azione del campo sulla carica** passa attraverso la conoscenza del **vettore forza elettrica** $\vec{F}$ che agisce sulla carica stessa: conoscere $\vec{F}$ significa sapere in quale **direzione** ed in quale **verso** si muove la carica e, inoltre, qual è il **modulo** della sua accelerazione[1].

[1] Attenzione: l'accelerazione dovuta al'azione della forza elettrica. Rammenta che potrebbero essere presenti altri tipi di forza.

Il vettore $\vec{F}$ **dipende** ovviamente **dal punto** $\boldsymbol{P}$ **e dalla carica** $\boldsymbol{q}$ che poniamo in $P$: in altri termini, $\vec{\boldsymbol{F}}$ **è funzione di** $\boldsymbol{P}$ **e** $\boldsymbol{q}$:

$$F = \boxed{F(P,q)} \qquad (1).$$

il simbolo esprime la dipendenza
di F da P e q

Per descrivere le caratteristiche del campo elettrico, però, si preferisce introdurre un nuovo vettore, il **vettore campo elettrico** $\vec{\boldsymbol{E}}$.

Per **definizione**, il vettore $\vec{E}$ nel punto $P$ della regione $\Re$ è il vettore:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \qquad (2),$$

dove $\vec{F}$ è la forza agente sulla carica $q$ posta nel punto $P$.

Riscritta la (2) nel modo seguente:

$$\vec{E} = \frac{1}{q} \cdot \vec{F} \qquad (3),$$

osserviamo che $\vec{E}$ è un multiplo positivo di $\vec{F}$ e dunque **ha la stessa direzione e lo stesso verso** di $\vec{E}$.

Per ciò che riguarda il **modulo**, invece, si ha:

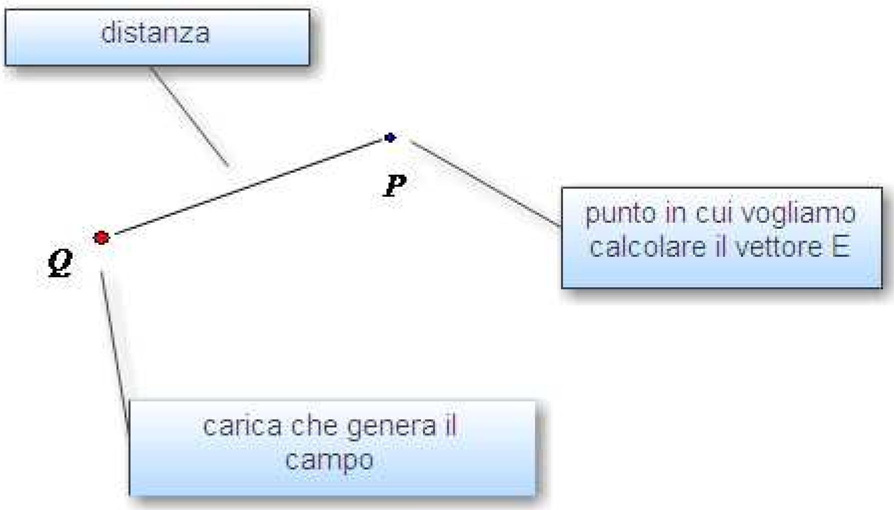
$$E = \frac{F}{q} \qquad (4).$$

La scelta del vettore $\vec{E}$ in luogo del vettore $\vec{F}$ come strumento di descrizione del campo elettrico **ha una ragione ben precisa**, della quale parleremo solo dopo aver sviluppato, nel paragrafo seguente, un esempio di calcolo del vettore campo elettrico in una situazione particolare.

### 4. Il campo elettrico generato da una carica puntiforme positiva

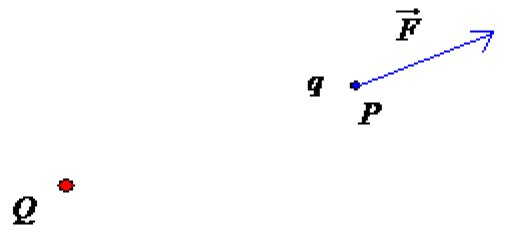
Una carica puntiforme positiva $Q$ **genera un campo elettrico** nello spazio circostante.

Determiniamo le **caratteristiche** del vettore $\vec{E}$ nel punto $P$ della figura, che si trova ad una distanza $d$ dalla carica $Q$:




Prendiamo una carica di prova $q$ e poniamola nel punto $P$.

Su tale carica agisce **la forza di Coulomb** $\vec{F}$, che rappresentiamo in figura:




Il vettore $\vec{E}$, come sappiamo, **ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore** $\vec{F}$.

Calcoliamo il suo **modulo**:

$$E=\frac{F}{q}=\frac{1}{q}\cdot F=\frac{1}{q}\cdot\boxed{k\frac{Qq}{d^2}}=k\frac{Q}{d^2} \qquad (5).$$

definizione (3)

espressione della forza di Coulomb

Pertanto, il modulo di $\vec{E}$ **è funzione unicamente della distanza** $\boldsymbol{d}$ tra il punto $P$ e la carica $Q$, nel quale è posta la carica $q$:

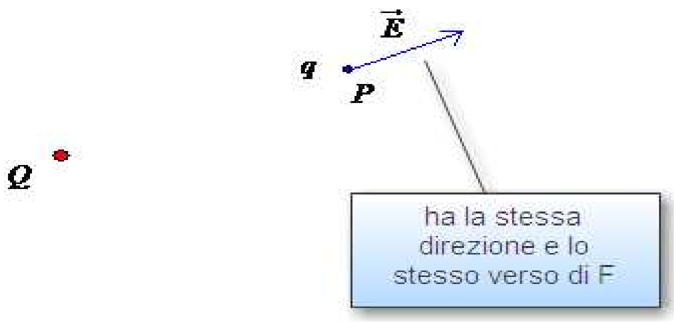
$$\boxed{E(d)}=k\frac{Q}{d^2} \qquad (6).$$

il simbolo esprime la dipendenza di E da d

In particolare, $E$ **è inversamente proporzionale al quadrato della distanza** $\boldsymbol{d}$: raddoppiando la distanza, il valore di $\vec{E}$ diviene la quarta parte; triplicando la distanza, il valore di $\vec{E}$ diviene la nona parte, e così via: il modulo di $\vec{E}$, pertanto, **diminuisce rapidamente all'aumentare della distanza.**

Facciamo, infine, esplicitamente notare che **il modulo di $\vec{E}$ non dipende**, a differenza della forza $\vec{F}$, **dalla carica $q$**: questa mancata dipendenza dalla carica prova lo fa preferire, nello studio delle caratteristiche del campo elettrico, al vettore forza.

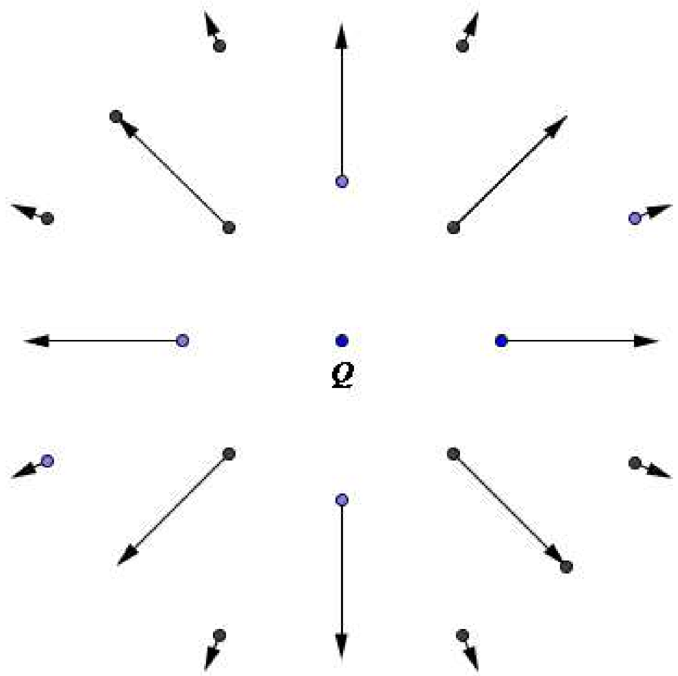
Rappresentiamo nella figura che segue **il vettore $\vec{E}$ nel punto $P$ :**




## 5. La mappa del campo elettrico generato da una carica puntiforme positiva

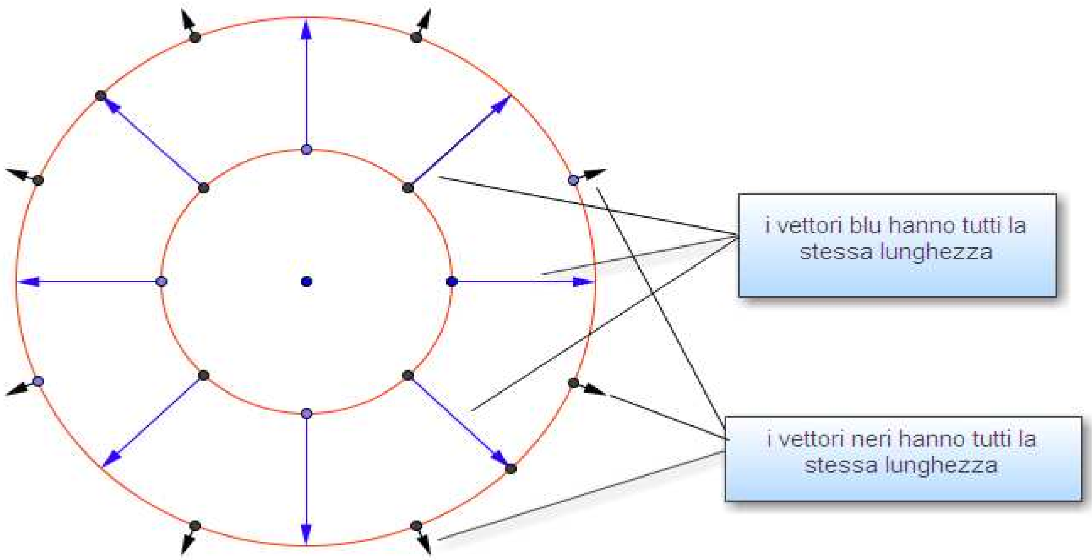
Per farci un'idea dell'**andamento del campo elettrico** in una regione $\Re$, possiamo pensare di tracciare un **congruo numero** di vettori campo elettrico $\vec{E}$ associati a qualche punto della regione $\Re$.

Disegniamo una **mappa** di questo tipo nel caso del campo elettrico generato da una carica puntiforme positiva $Q$:

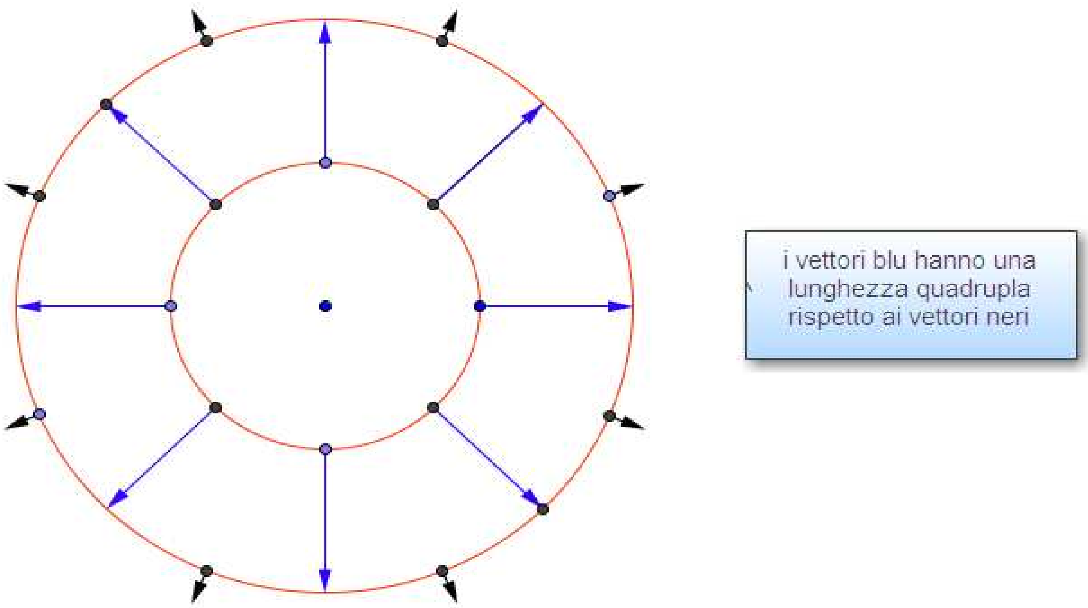


Osserviamo che

1. il modulo del vettore $\vec{E}$ associato a punti che si trovano alla **stessa distanza** dalla carica $Q$ ha lo **stesso valore**:




2. il modulo del vettore $\vec{E}$ in punti che si trovano a **distanza doppia** dalla carica che genera il campo diventa, in accordo con la (6), la **quarta parte**.



E’ facile intuire che una rappresentazione di questo genere **non è molto efficace**: per risultare tale, infatti, dovremmo tracciare **un numero notevole** di vettori campo elettrico e questo finirebbe inevitabilmente per rendere confusa la mappa.

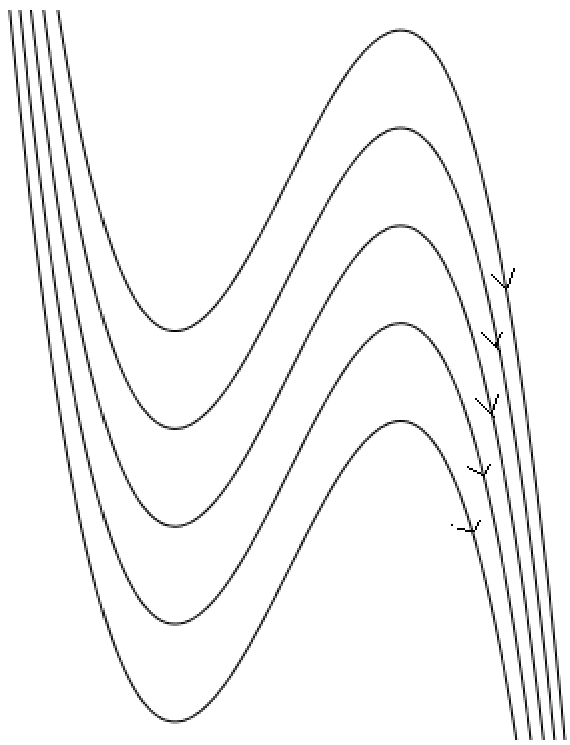
Urge, dunque, trovare un modo più efficace per rappresentare graficamente il vettore $\vec{E}$: tale modo esiste e si avvale della nozione di **linea di campo.**

## 6. La rappresentazione del campo elettrico mediante le sue linee di campo

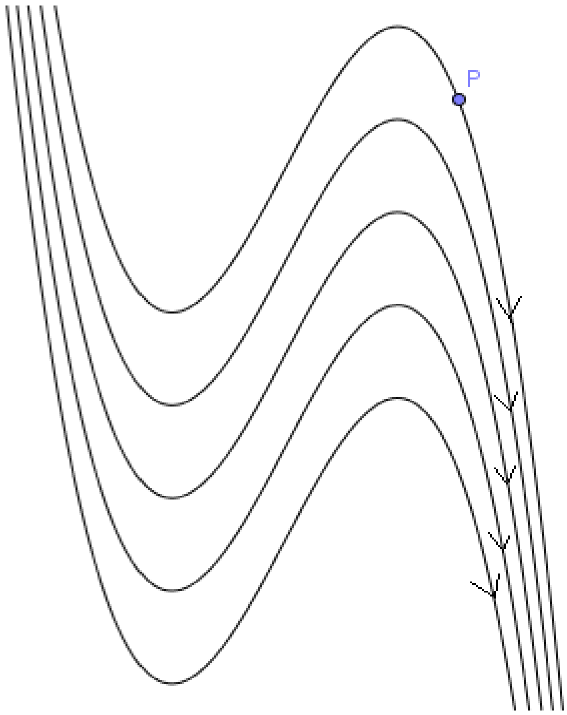
Una **linea di campo** di un campo elettrico è una linea che consente di determinare la **direzione** ed il **verso** del vettore $\vec{E}$ in ogni punto della linea stessa.

Vediamo come.

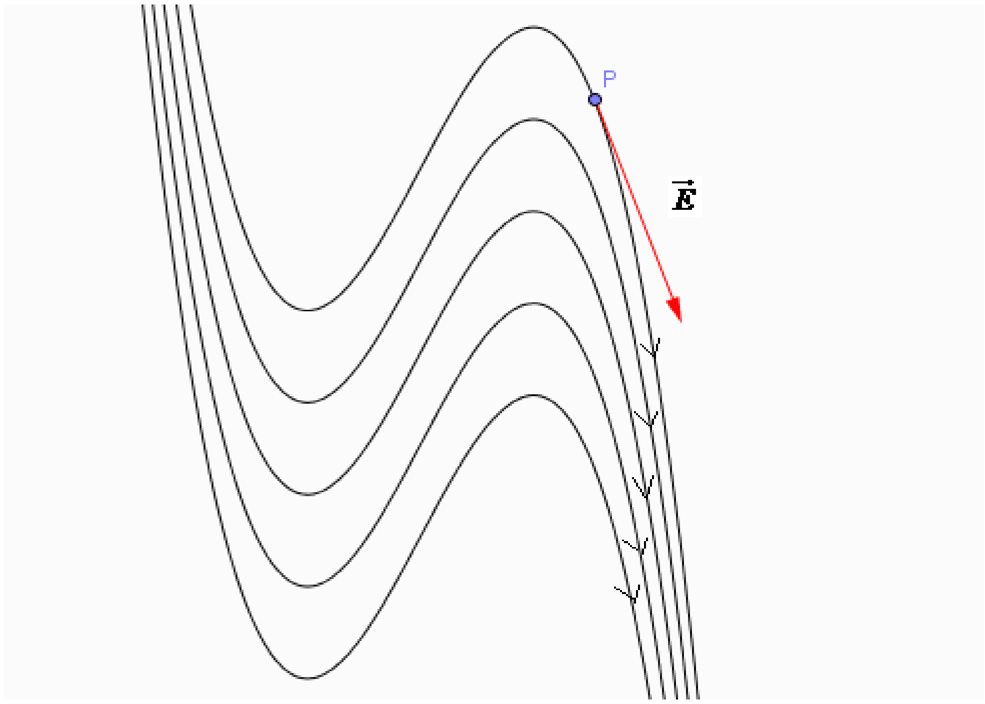
Nella figura che segue, abbiamo tracciato alcune **linee di campo** del campo elettrico presente in una regione:



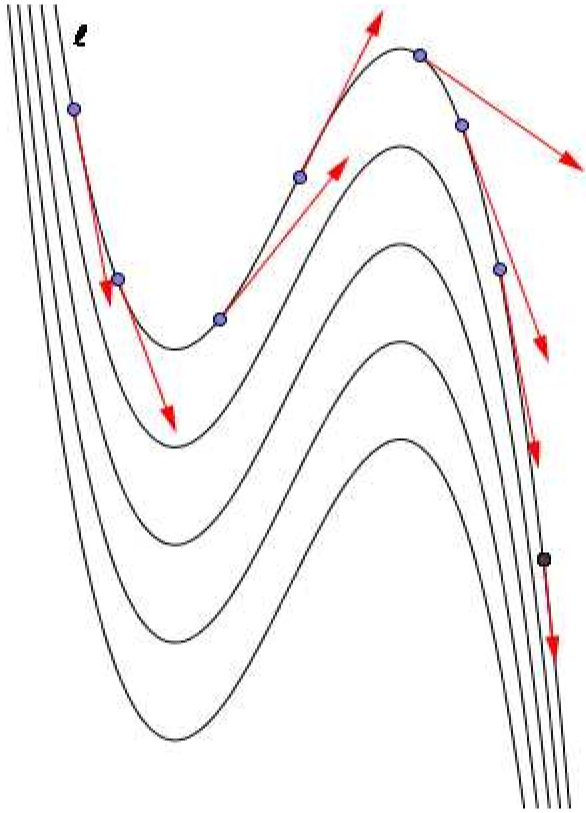
Indichiamo con $\ell$ una di esse e sia $P$ un suo punto:




La **direzione** del vettore $\vec{E}$ nel punto $P$ è data dalla **tangente** nel punto $P$ alla linea $\ell$; il **verso** di $\vec{E}$ si può ricavare seguendo l'orientamento della linea $\ell$:



Ecco, qui di seguito, rappresentato il vettore $\vec{E}$ in alcuni punti della linea $\ell$:

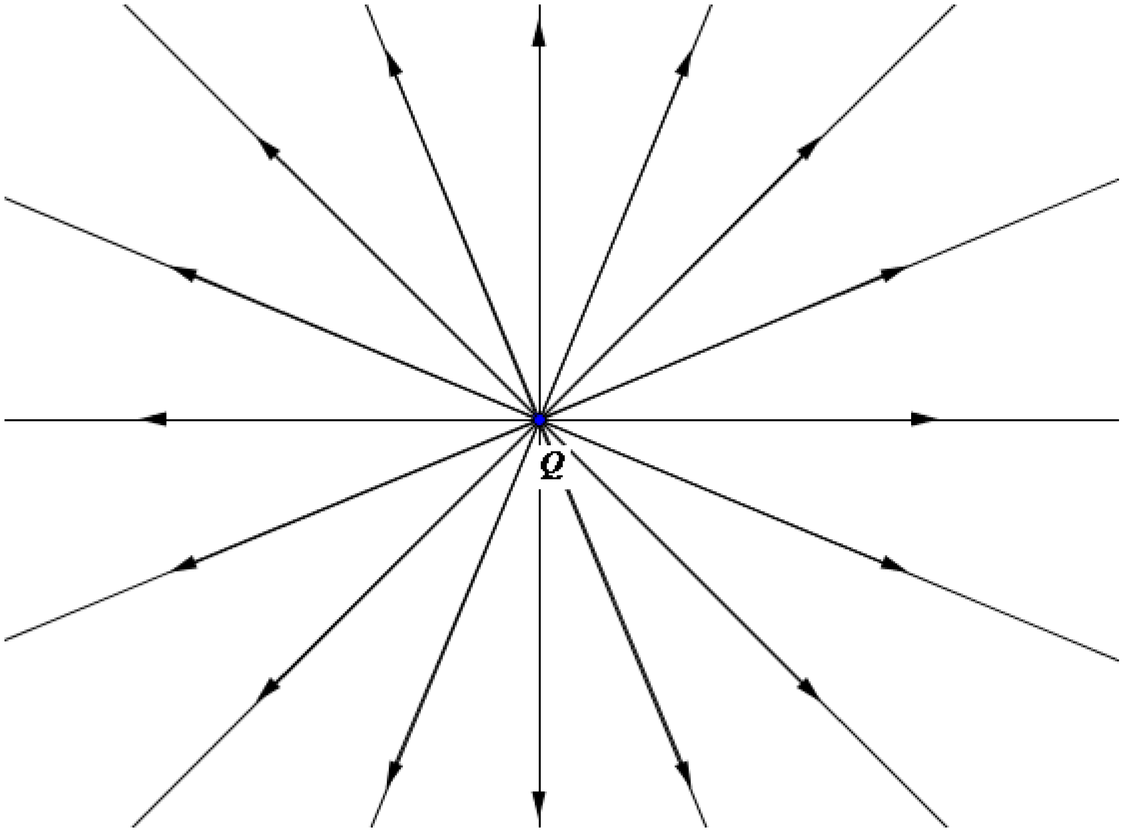



Non è difficile comprendere che la rappresentazione del campo mediante le linee di campo consente di tracciare **un'infinità di vettori** $\vec{E}$.

Il limite di tale rappresentazione sta nel fatto che una tale mappa **non dà alcuna informazione circa il modulo di** $\vec{E}$ **.**

## 7. Le linee di campo del campo elettrico generato da una carica positiva

Nella figura seguente, tracciamo le linee di campo del **campo elettrico generato da una carica puntiforme positiva** $\boldsymbol{Q}$ :



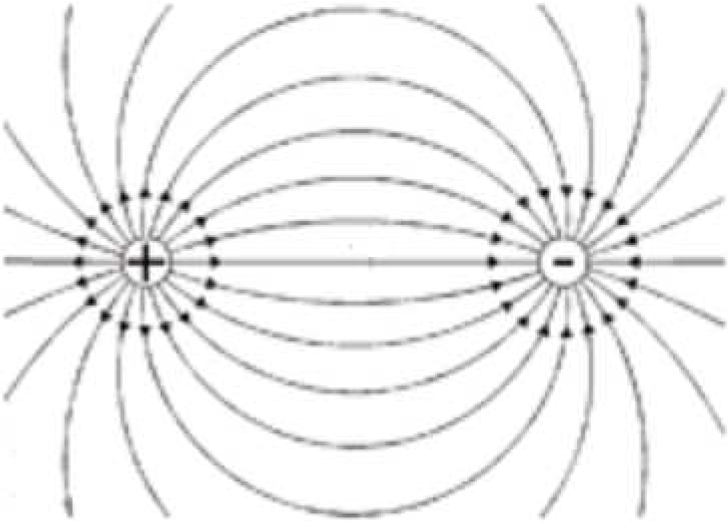

Non è difficile comprendere perché, in questo caso, le linee di campo siano **semirette uscenti dalla carica $Q$**: prendi un punto $P$ su una linea e traccia la direzione ed il verso di $\vec{E}$ in quel punto. Cosa accade?

Prova, inoltre, a tracciare le linee di campo del **campo elettrico generato da una carica puntiforme negativa**. Cosa osservi?

### 8. Le linee di campo del campo elettrico generato da un dipolo

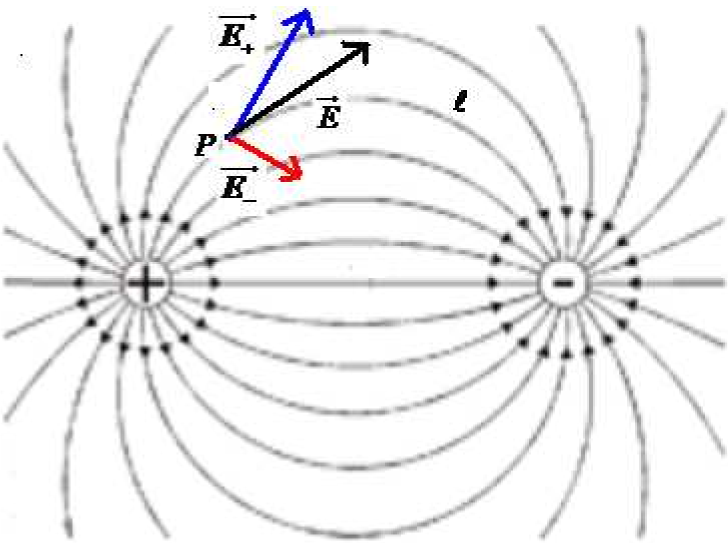
Un **dipolo** è un insieme di **due cariche elettriche puntiformi**.

Nella figura che segue, abbiamo tracciato le **linee di campo generato da un dipolo** formato da due cariche di ugual valore e **discordi**:



Proviamo a **giustificare** la precedente figura.

A tale proposito, prendiamo un punto $P$ su una linea di campo $\ell$ e tracciamo il vettore campo elettrico $\overrightarrow{\boldsymbol{E}_+}$ dovuto alla carica positiva ed il vettore campo elettrico $\overrightarrow{\boldsymbol{E}_-}$ dovuto alla carica negativa[2]:




[2] Ti invitiamo ad osservare che il modulo di $\overrightarrow{\boldsymbol{E}_+}$ è maggiore del modulo di $\overrightarrow{\boldsymbol{E}_-}$ : per quale motivo?

Il vettore campo elettrico $\vec{E}$ nel punto $P$ è, ovviamente[3], la risultante della somma ( vettoriale ) dei due vettori $\overrightarrow{\boldsymbol{E}_+}$ ed $\overrightarrow{\boldsymbol{E}_-}$ :

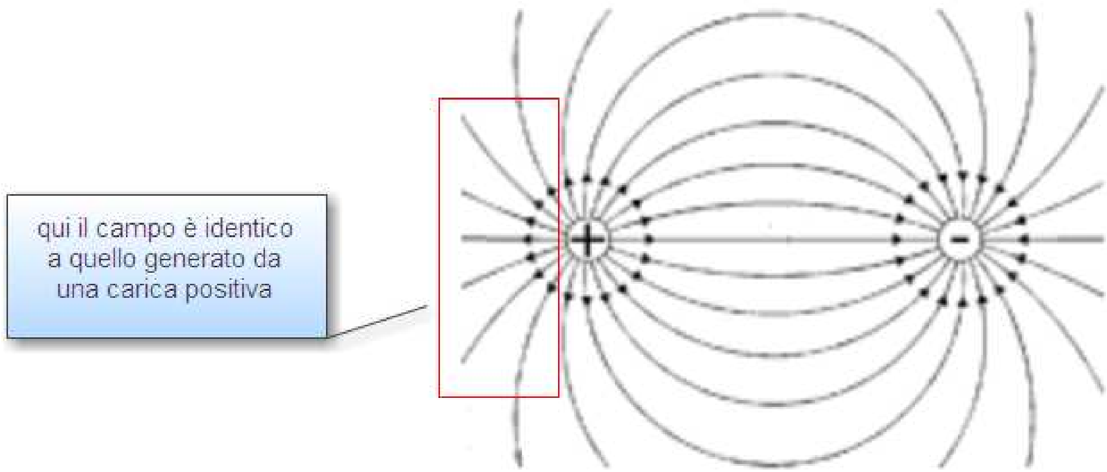
$$\vec{E} = \overrightarrow{E_+} + \overrightarrow{E_-} \qquad (7)$$

Il vettore $\vec{E}$ ha la direzione della tangente nel punto $P$ alla linea di campo $\ell$ ed il verso orientato concordemente alla linea in questione.

Osserviamo, inoltre, che le linee di campo **escono dalla carica positiva ed entrano in quella negativa**; alcune sono linee **aperte**, quelle cioè che si estendono all'infinito; mentre altre sono **chiuse**, cioè partono dalla carica positiva ed entrano in quella negativa.

Infine, nella regione a sinistra della carica positiva, le linee di campo sono radiali ed uscenti dalla carica stessa: in tale regione, infatti, l'influenza della carica negativa è decisamente minore ed il campo elettrico è simile a quello generato dalla sola carica positiva.

Analogo discorso vale, ovviamente, per la regione a destra della carica negativa.




[3] L'ovvietà deriva dal fatto che $\vec{E}$ **è una grandezza vettoriale**.

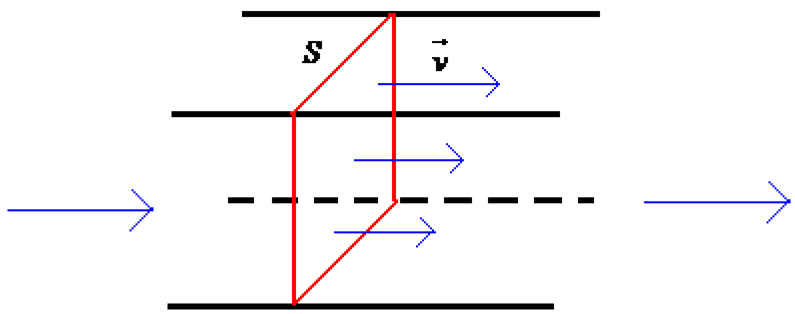
## 9. La portata di un fluido ( parte prima )

Per determinare le caratteristiche – modulo, direzione e verso – del vettore campo elettrico $\vec{E}$ in una regione in cui è presente un campo elettrico, è utile fare riferimento ad un risultato, noto come **Teorema di Gauss**[4].

Tale teorema ci dice qualcosa circa il valore del **flusso del campo elettrico uscente da una superficie chiusa**.

Abbiamo dunque la necessità di definire preliminarmente il concetto di **flusso di un vettore attraverso una superficie piana** e, per far questo, partiamo dalla nozione di **portata** di un fluido.

A tale proposito, immaginiamo un fluido che scorra in un condotto e attraversi una **superficie piana** $S$, **sezione** del condotto, in modo tale che il vettore velocità $\vec{v}$ associato alle particelle del fluido sia **perpendicolare** ad $S$ e si mantenga **costante**.




Per definizione, la **portata del fluido attraverso la superficie $S$** è la grandezza fisica scalare:

$$\bar{q} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \qquad (8),$$

dove $\Delta V$ è il volume del fluido che attraversa la superficie $S$ nel tempo $\Delta t$.

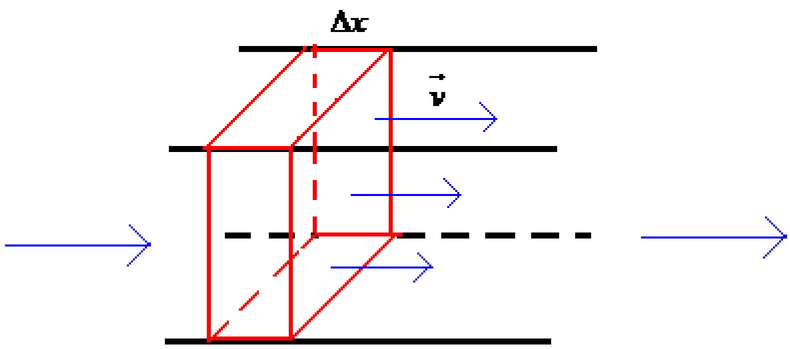
[4] E', più precisamente, il **Teorema di Gauss per il campo elettrico**.

L'unità di misura della portata è il $\frac{m^3}{s}$.

Il **significato** di tale grandezza appare evidente: essa misura la quantità di fluido che passa attraverso la superficie nell'unità di tempo.

Nell'intervallo di tempo $\Delta t$ la singola particella di fluido, muovendosi con velocità costante $\vec{v}$, percorre $\Delta x = v \cdot \Delta t$ metri.

Pertanto, sono in grado di attraversare la superficie $S$ **tutte le particelle contenute nel parallelepipedo** disegnato nella figura seguente:




Così, possiamo riscrivere la (8) nella forma:

$$\bar{q} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A \cdot \Delta x}{\Delta t} = A \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = A \cdot v \qquad (9),$$

dove con $A$ abbiamo indicato l'**area** della superficie $S$.

La (9) ci dice che la portata di un fluido è **direttamente proporzionale alla velocità** costante con cui il fluido si muove, e questo fatto appare decisamente scontato: a maggior velocità, infatti, ci aspettiamo un maggior flusso di liquido attraverso la sezione $S$.

**10. Il vettore superficie**

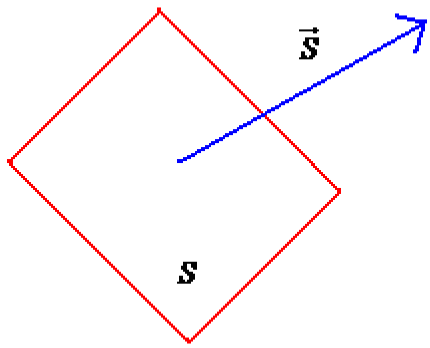
Introduciamo **il vettore superficie** $\vec{S}$ associato alla superficie **piana** $S$.

Tale vettore ci consentirà di **generalizzare**, nel successivo paragrafo, la nozione di portata di un fluido attraverso una superficie.

Data la superficie piana $S$, il vettore superficie $\vec{S}$ è il vettore avente:

- **direzione** perpendicolare alla superficie $S$
- **verso** a piacere
- **modulo** uguale all'area $A$ della superficie $S$.

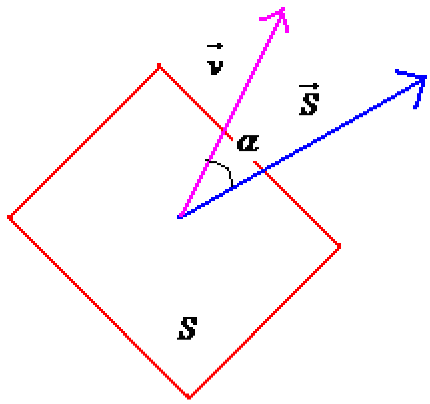
Nella figura che segue, abbiamo tracciato la superficie piana $S$ ed il vettore superficie $\vec{S}$:




**11. La portata di un fluido ( parte seconda )**

Supponiamo che il vettore velocità $\vec{v}$ associato alle particelle del fluido **non sia perpendicolare** ad $S$ e formi un angolo $\alpha$ con il vettore superficie $\vec{S}$.

In tal caso, ci aspettiamo che la portata del fluido attraverso $S$ **risulti inferiore** rispetto al caso precedentemente illustrato: **meno fluido,** infatti, attraversa la sezione $S$ nel **medesimo intervallo di tempo**.




La formula (9) della portata va allora modificata nel modo seguente:

$$\bar{q} = A \cdot v \cdot \cos\alpha \qquad (10).$$

Utilizzando il prodotto scalare, possiamo riscrivere la (10) nella forma più compatta:

$$\bar{q} = \vec{v} \cdot \vec{S} \qquad (11).$$

La formula (11) è la definizione di portata di **un fluido attraverso una superficie piana** $S$ .

Facciamo esplicitamente osservare che qualora il vettore velocità $\vec{v}$ sia parallelo alla superficie $S$ , e dunque il fluido scorra parallelamente ad $S$ , la portata **assume il valore 0**: attraverso la superficie, infatti, **non passa alcuna particella di fluido**.

## 12. Il flusso del vettore $\vec{E}$ attraverso una superficie piana

La (11) si presta ad una **interessante generalizzazione**. Se con $\vec{w}$ indichiamo una qualunque **grandezza vettoriale costante**[5], possiamo allora definire, sulla falsariga della (11), **la portata del vettore** $\vec{w}$ **attraverso la superficie piana** $S$ **:**

---

[5] **E' sufficiente che tale grandezza risulti costante sui punti della superficie considerata**.

$$\phi_{\vec{S}}\left(\vec{w}\right)=\vec{w}\cdot\vec{S} \qquad (12).$$

La grandezza scalare $\phi_{\vec{S}}\left(\vec{w}\right)$ prende il nome di **flusso del vettore $\vec{w}$ attraverso la superficie piana $S$ .**

Nel caso in cui $\vec{w}=\vec{E}$, otteniamo la definizione di **flusso del vettore**[6] **$\vec{E}$ attraverso la superficie piana $S$ :**

$$\phi_{\vec{S}}\left(\vec{E}\right)=\vec{E}\cdot\vec{S} \qquad (13).$$

La nozione di flusso del vettore $\vec{E}$ appare decisamente molto più **astratta** della nozione di portata ( flusso ) di un fluido attraverso una superficie piana: mentre in quest'ultimo caso qualcosa passa effettivamente attraverso la superficie $S$ - le particelle di fluido - nel caso del vettore campo elettrico ad attraversare la superficie considerata è un campo vettoriale di natura elettrica.

In ogni caso, questa **astrazione concettuale** ci metterà nelle condizioni di saper calcolare, attraverso il **Teorema di Gauss**, il valore del vettore campo elettrico in moltissime situazioni.

## 13. Il flusso del vettore $\vec{E}$ attraverso una superficie qualunque

Nel precedente paragrafo, abbiamo visto come calcolare il **flusso** del vettore $\vec{E}$ attraverso una **superficie piana** $S$ .

L'applicazione della

$$\phi_{\vec{S}}\left(\vec{E}\right)=\vec{E}\cdot\vec{S} \qquad (13).$$

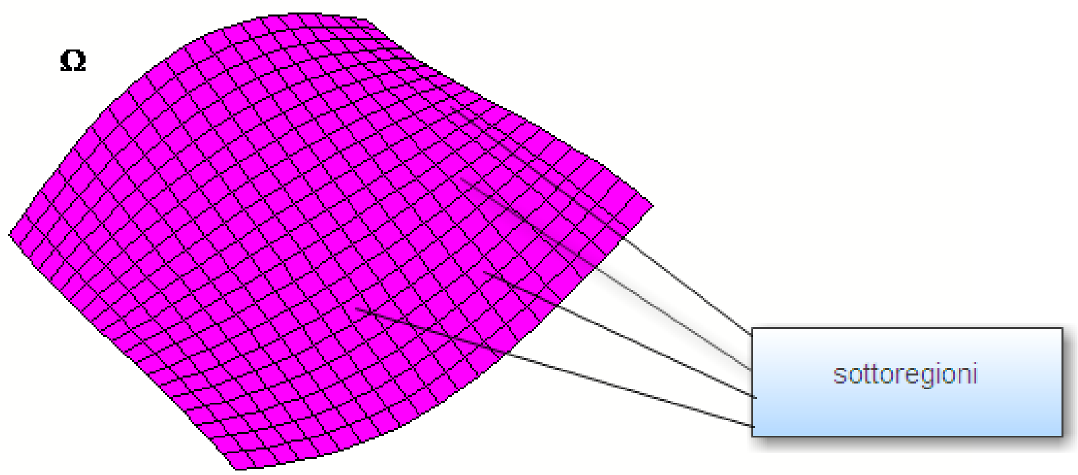
---

[6] Il vettore campo elettrico $\vec{E}$ deve, lo rimarchiamo, essere **costante sui punti della superficie considerata**.

È però vincolata al fatto che il vettore campo elettrico $\vec{E}$ **deve essere costante** su tutti i punti di $S$.

**E' possibile generalizzare** la precedente definizione ed estenderla al caso di una **superficie qualunque** $\Omega$, anche non piana dunque, e ad un vettore $\vec{E}$ **non necessariamente costante** sui punti di $\Omega$.

A tale proposito, consideriamo la **superficie** $\Omega$ in figura:

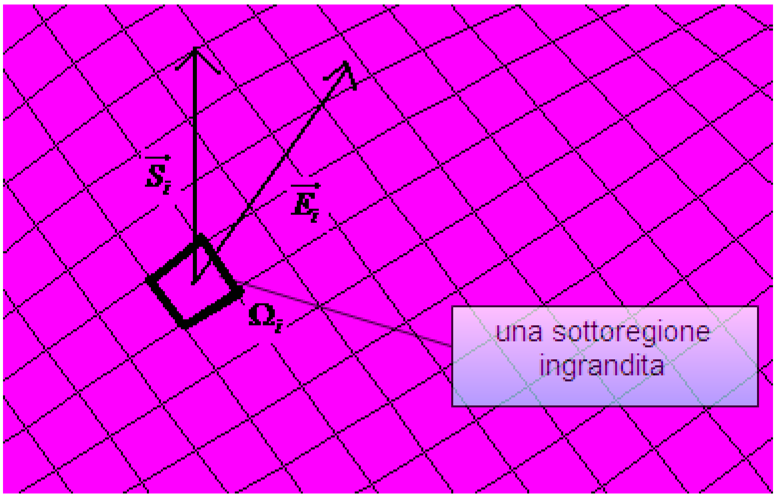



Nella precedente immagine, la superficie $\Omega$ **è stata suddivisa in tante piccole sottoregioni** ciascuna delle quali è

- talmente piccola da essere considerata **approssimativamente piana**
- tale che il vettore campo elettrico $\vec{E}$ si possa considerare, all'interno di ognuna di esse, **approssimativamente costante**.

Indichiamo con $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, ..., \Omega_n$ le $n$ **sottoregioni** in cui è stata suddivisa la regione $\Omega$; con $\vec{S_1}, \vec{S_2}, \vec{S_3}, ..., \vec{S_n}$ i vettori superficie, rispettivamente, di $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, ..., \Omega_n$; ed infine con $\vec{E_1}, \vec{E_2}, \vec{E_3}, ..., \vec{E_n}$ i vettori campo elettrico costanti, rispettivamente, nelle sottoregioni $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, ..., \Omega_n$.

Qui di seguito vediamo un particolare della regione $\Omega$ ingrandita, nel quale abbiamo messo in evidenza la sottoregione $\Omega_i$, il suo vettore superficie $\vec{S}_i$ ed il vettore campo elettrico $\vec{E}_i$ presente nella sottoregione:




Allora, per definizione**, il flusso del vettore $\vec{E}$ attraverso la superficie $\Omega$ è la quantità:**

$$\phi_\Omega\left(\vec{E}\right)=\boxed{\sum_{j=1}^{n}\phi_{\Omega_j}\left(\vec{E}_j\right)}=\sum_{j=1}^{n}\vec{E}_j\cdot\vec{S}_j=\vec{E}_1\cdot\vec{S}_1+\vec{E}_2\cdot\vec{S}_2+\ldots+\vec{E}_n\cdot\vec{S}_n \qquad (14)$$

somma di tutti i flussi del vettore campo elettrico uscenti da ogni singola sottoregione

## 14. Le superfici gaussiane

Una superficie si dice **chiusa** o **gaussiana** se consente di suddividere lo spazio in due regioni, una interna alla superficie e l'altra esterna.

Le superfici di una sfera o di un solido qualunque sono esempi di superfici chiuse.

## 15. Il Teorema di Gauss

Enunciamo il:

**Teorema di Gauss**

Il **flusso** del vettore campo elettrico $\vec{E}$ uscente da una **superficie chiusa** $\Omega$ è dato da

$$\Phi_{\Omega}\left(\vec{E}\right)=\frac{\Delta q}{\varepsilon},$$

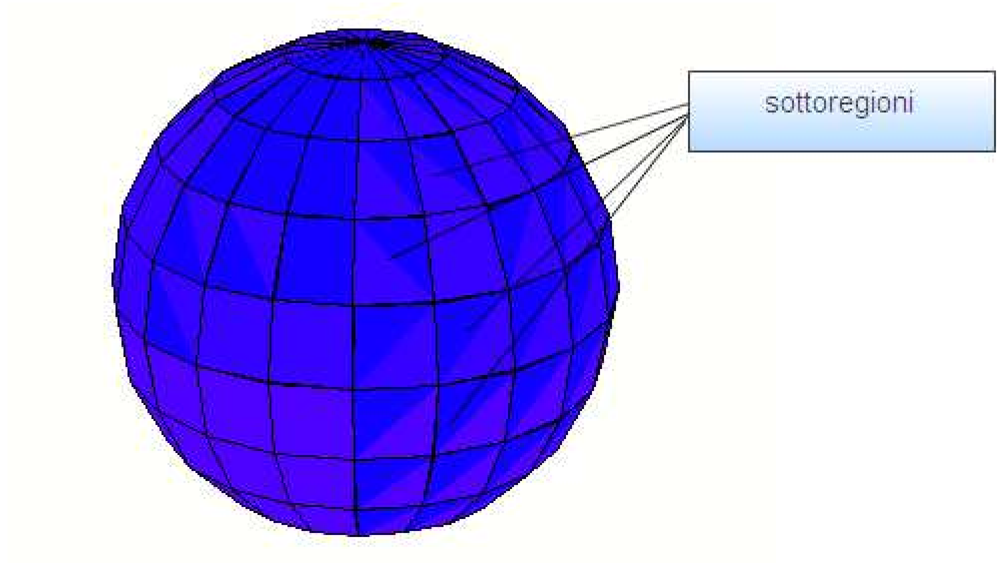
dove $\Delta q$ è la carica presente in $\Omega$ ed $\varepsilon$ è la costante dielettrica del mezzo in cui è presente il campo.

Il teorema in questione, dunque, consente di calcolare immediatamente di calcolare il flusso del vettore campo elettrico $\vec{E}$ uscente da una superficie chiusa $\Omega$, **evitando completamente il calcolo della (14).**

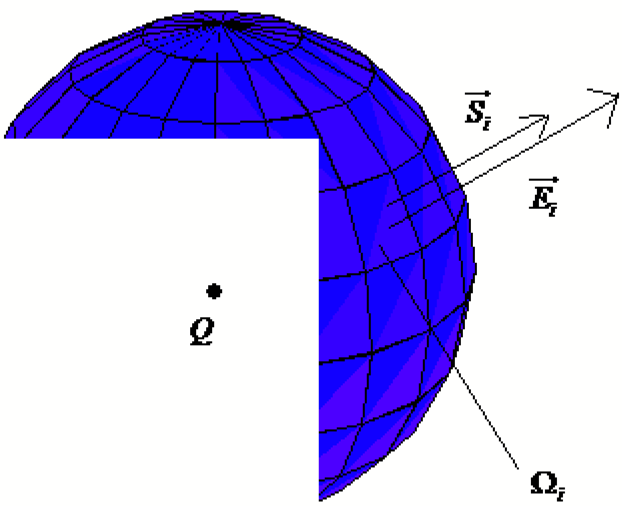
## 16. La dimostrazione del Teorema di Gauss in un caso particolare

Dimostriamo l'enunciato del Teorema di Gauss in un caso particolare, quello del flusso del vettore campo elettrico $\vec{E}$, **generato da una carica puntiforme** $\boldsymbol{Q}$, uscente da una **superficie chiusa sferica** $\Omega$, che ha il suo **centro** nella carica $Q$.

Suddividiamo la superifice sferica $\Omega$ in $n$ sottoregioni $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, ..., \Omega_n$ ciascuna delle quali è talmente piccola da essere considerata **approssimativamente piana.**




Il vettore campo elettrico $\overrightarrow{E_i}$ presente nella sottoregione $\Omega_i$ è **approssimativamente costante** e **parallelo** al vettore superficie $\overrightarrow{S_i}$ di $\Omega_i$: questo poiché la direzione di $\overrightarrow{E_i}$ è **radiale** e dunque perpendicolare al **piano** $\Omega_i$.




Calcoliamo, applicando la (14), il flusso del vettore campo elettrico $\overrightarrow{E}$ uscente dalla superficie sferica $\Omega$:

$$\phi_\Omega\left(\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{E_1} \cdot \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{E_2} \cdot \overrightarrow{S_2} + ...\overrightarrow{E_n} \cdot \overrightarrow{S_n} \qquad (14).$$

Il citato **parallelismo** tra i due vettori $\vec{E_i}$ ed $\vec{S_i}$ consente di scrivere la (14) nella forma:

$$\phi_\Omega\left(\vec{E}\right) = E_1S_1 + E_2S_2 + \ldots + E_nS_n \qquad (15).$$

Osserviamo inoltre che tutti i vettori $\vec{E_i}$ **hanno lo stesso modulo**, poiché sono applicati a punti **equidistanti** dalla carica generatrice $Q$.

Il valore comune di tale modulo è, come sappiamo, :

$$E = k\frac{Q}{r^2} \qquad (16)$$

dove con $r$ abbiamo indicato il raggio della sfera.

Pertanto,

$$\phi_\Omega\left(\vec{E}\right) = E_1S_1 + E_2S_2 + \ \ldots\ + E_nS_n = ES_1 \ + \ ES_2 \ + \ \ldots \ + ES_n$$

e così:

$$\phi_\Omega\left(\vec{E}\right) = \ E\cdot\left(S_1 + S_2 + \ldots + S_n\right) \qquad (17).$$

La somma $S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ ci dà **l'area della superficie sferica** e dunque:

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = 4\pi r^2 \qquad (18).$$

Inserendo le (16) e (18) nella (17), otteniamo:

$$\phi_\Omega\left(\vec{E}\right) = \ E\cdot\left(S_1 + S_2 + \ldots + S_n\right) = k\frac{Q}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{Q}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon},$$

che è quanto dovevamo dimostrare.