# Energia potenziale elettrica e potenziale

## 0. Premessa

In queste pagine R indicherà una regione in cui è presente un campo elettrostatico.

## 1. La forza elettrostatica è conservativa

Una o più cariche ferme oppure un conduttore in equilibrio elettrostatico[1] generano **un campo elettrico conservativo**, cioè un campo la cui forza elettrica associata è **conservativa**.

Pertanto, il lavoro di tale forza per trasportare una carica da un punto A del campo ad un punto B **dipende unicamente dai due punti A e B e non dal percorso seguito**.

## 2. L'energia potenziale elettrica

Come sappiamo, la **conservatività** della forza elettrostatica **implica l'esistenza di una funzione potenziale U**, che consente di calcolare il lavoro in modo agevole mediante l'utilizzo della formula[2]:

$$L_{A\to B}(\vec{F}) = U_A - U_B \qquad (2.1)$$

La funzione U prende il nome di **energia potenziale elettrica**.

Dal punto di vista fisico, **l'energia potenziale elettrica è una sorta di energia immagazzinata da una carica che viene posta nella regione R**, **energia che ha origine nel campo stesso**: infatti, la carica posta nella regione R ha la "capacità" di mettersi in movimento sotto l'azione di una forza (elettrica).

La stessa carica, posta in una regione "vuota" dal punto di vista fisico, in assenza cioè di un campo elettrico, resta assolutamente ferma, denotando una "privazione" di energia.

L'unità di misura dell'energia potenziale elettrica è ovviamente il **joule** (simbolo: J).

## 3. Un esempio di campo elettrico uniforme

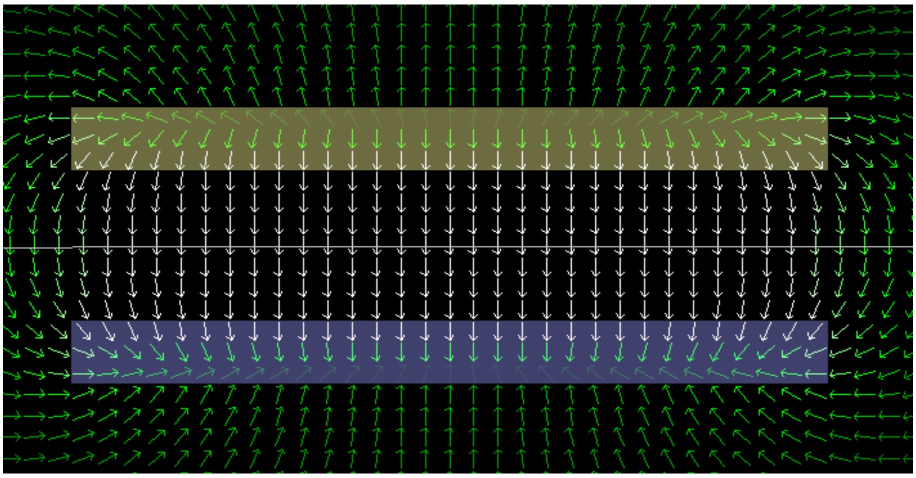
Rammento che un campo elettrico presente in una regione R si dice **uniforme** se il vettore campo elettrico $\vec{E}$ è costante in tutti i punti di R, cioè il vettore $\vec{E}$ nei punti di quella regione non muta la sua direzione ed il suo verso e mantiene sempre lo stesso valore.

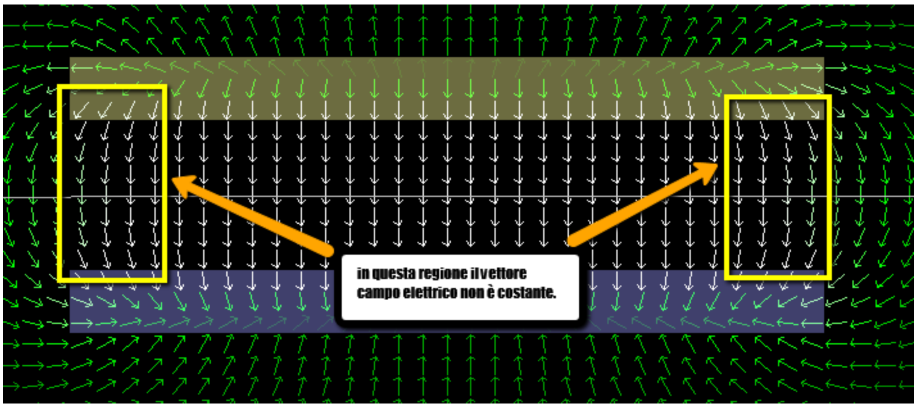
[1] Cioè un conduttore le cui cariche sono ferme.
[2] Nella formula (2.1), $\boldsymbol{L_{A\to B}(\vec{F})}$ indica il lavoro della forza $\vec{F}$ per trasportare la carica q dal punto A al punto B.

Un campo elettrico uniforme è, ad esempio, quello che si viene a creare nella regione di spazio tra **due lastre di metallo affacciate**, supposte estese infinitamente, una delle quali è carica positivamente, l'altra negativamente.

Siccome nella realtà l'estensione delle due lastre è **finita**, il campo che si viene a formare tra le due lastre è **pressochè uniforme**, eccetto che nelle vicinanze dei bordi delle due lastre e all'esterno, come mostra la figura che segue in cui sono stati tracciati alcuni vettori $\vec{E}$ e dalla quale è semplice risalire alle **linee di campo**[3].

La lastra superiore è carica positivamente, quella inferiore negativamente.

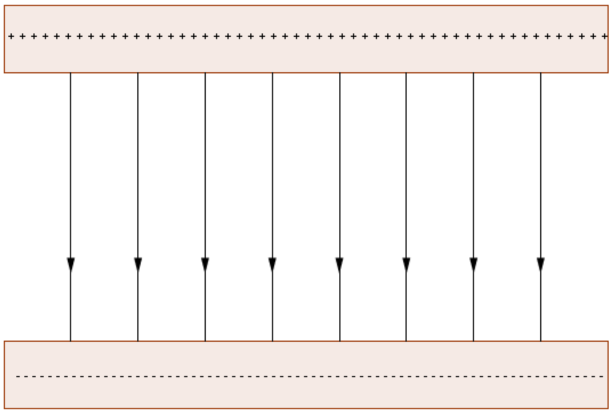




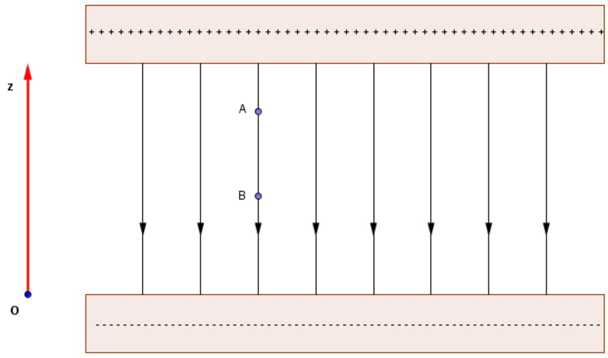

**4. L'espressione della funzione energia potenziale in un campo elettrico uniforme**

Nella figura che segue ho tracciato le **linee di forza del campo elettrico** presente nella regione tra due lastre cariche affacciate, rimanendo però ad una opportuna distanza dai bordi delle stesse, laddove il campo elettrico non è più uniforme:

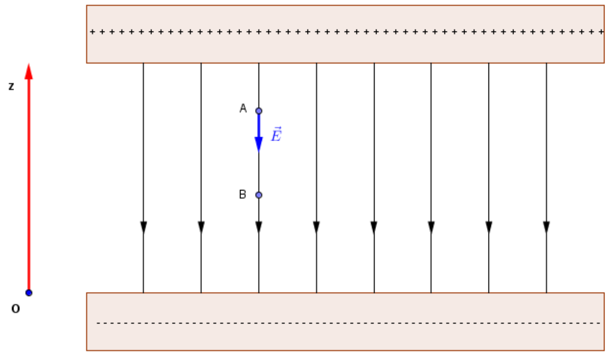
[3] Vedi la figura nel paragrafo 4, nella pagina successiva.



Per calcolare l'**espressione matematica** della funzione energia potenziale U introduco un **sistema di riferimento**[4], l'asse z in figura con origine nel punto O.




Traccio il vettore campo elettrico $\vec{E}$ nel punto A[5]:




e calcolo il **lavoro** che la forza elettrica compie per trasportare la carica positiva q dal punto A al punto B:

$$L_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = q\vec{E}\cdot\overrightarrow{AB} = qE\cdot(z_A - z_B) = qEz_A - qEz_B \qquad (4.1)$$

La comparazione tra la (2.1) e la (4.1) suggerisce come energia potenziale[6] la funzione[7]

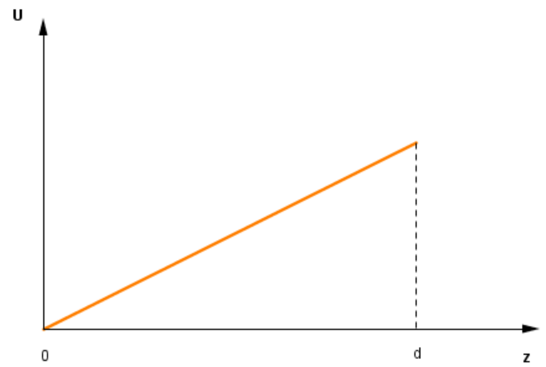
[4] E' (fondamentalmente) un sistema di ascisse.
[5] Data la linea di forza cui appartiene il punto A, non ti dovrebbe essere difficile comprendere perché il vettore $\vec{E}$ sia quello tracciato in figura.
[6] elettrica.

$$U(z, q) = qEz \qquad (4.2)$$

L'energia potenziale **dipende dunque dalla carica q e dal punto in cui la carica è posta**, cioè dall'ascissa z di q.

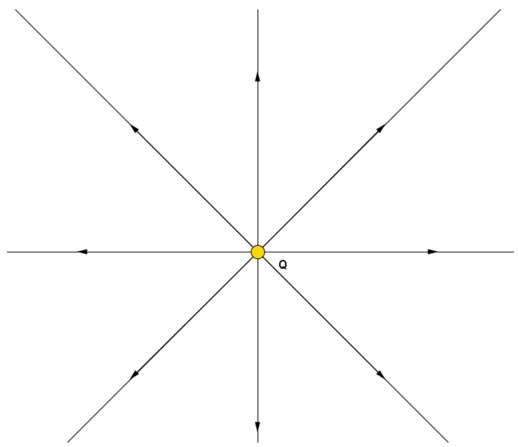
In particolare, più la carica è distante dalla lastra negativa, maggiore è la sua energia potenziale, che si azzera sui punti della lastra negativa[8].

Se la distanza tra le due lastre affacciate è d, il grafico della funzione (4.2) è il segmento rappresentato nel piano cartesiano che segue:




**5. L'espressione della funzione energia potenziale nel campo elettrico non uniforme generato da una carica puntiforme positiva**

Una **carica puntiforme positiva Q** genera un campo elettrico le cui linee di forza sono, come sappiamo, **radiali**[9] e **centrifughe**:




[7] $\boldsymbol{U(z,q)}$ indica che la funzione U dipende da z e da q.
[8] In effetti, sulla lastra negativa la carica q non ha più possibilità di movimento e dunque non possiede "energia".
[9] con centro nella carica Q che genera il campo.

Tale campo **non è uniforme** poiché, come sappiamo, il vettore $\vec{E}$ non mantiene costante né la sua direzione né il suo modulo.

Si può dimostrare[10] che *una*[11] **funzione energia potenziale** per questo campo è:

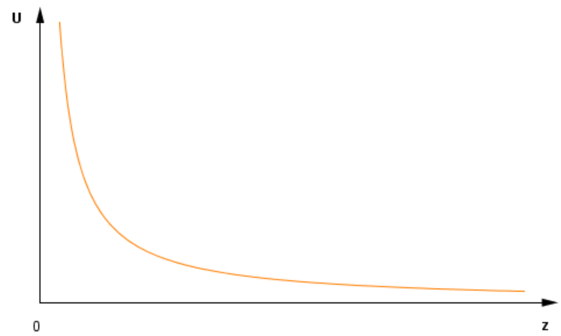
$$U(z,q) = \frac{kqQ}{z} \qquad (5.1)$$

dove q indica una carica positiva posta nel campo, z la distanza della carica q dalla carica Q che genera il campo e k è la costante che compare nella legge di Coulomb.

Anche in questo caso, **l'energia potenziale dipende dalla carica q e dalla posizione in cui la carica è posta**.

In particolare, l'energia potenziale diminuisce man mano che la carica q si allontana dalla carica generatrice Q e **si azzera all'infinito**, com'è ovvio attendersi visto che una carica molto lontana dalla carica generatrice Q praticamente non risente dell'azione del campo elettrico[12].

L'andamento di U in funzione di z[13] è riportato nel grafico seguente, che è un ramo di iperbole:




## 6. Il potenziale elettrico

I fisici preferiscono introdurre una funzione, detta **potenziale elettrico**, che, a differenza dell'energia potenziale elettrica, **dipende unicamente dal punto della regione R in cui è posta una carica q e non dalla carica stessa**.

La definizione della **funzione potenziale elettrico V** è semplice:

$$V = \frac{U}{q} \qquad (6.1)$$

Cioè, il **potenziale elettrico di un punto P** di una regione R è il rapporto tra l'energia potenziale della carica q posta nel punto P e la carica stessa.

---

[10] Io non lo farò perché ci mancano gli strumenti matematici essenziali.

[11] Dico una poiché **esistono infinite funzioni che possono fungere da energia potenziale**.Ma non è questo il luogo per approfondire questa frase.

[12] e dunque non può ricavare "energia" dal campo.

[13] per un valore fisssato della carica q.

L'**unità di misura** del potenziale elettrico è il **volt**, il cui simbolo è **V.**

Pertanto, $1\mathrm{V} = \frac{1\mathrm{J}}{1\mathrm{C}}$ .

**Il potenziale V è una grandezza scalare ed associa dunque ad ogni punto della regione R uno ed un solo numero (reale).**

## 7. La funzione potenziale elettrico nei due casi trattati nei paragrafi 4. e 5.

La funzione potenziale elettrico nel caso del campo uniforme introdotto nel paragrafo 4. è data da:

$$V(z) = \frac{U(z,q)}{q} = \frac{qEz}{q} = Ez \qquad (7.1)$$

mentre, nel caso del campo non uniforme trattato nel paragrafo 5, si ha:

$$V(z) = \frac{U(z,q)}{q} = \frac{\frac{kqQ}{z}}{q} = \frac{kQ}{z} \qquad (7.2)$$

Come puoi notare, nelle formule (7.1) e (7.2) **la carica q non compare**[14] **nell'espressione finale del potenziale**; cosa che accade non solo in queste due particolari situazioni ma **in ogni altra situazione fisica diversa da queste due.**

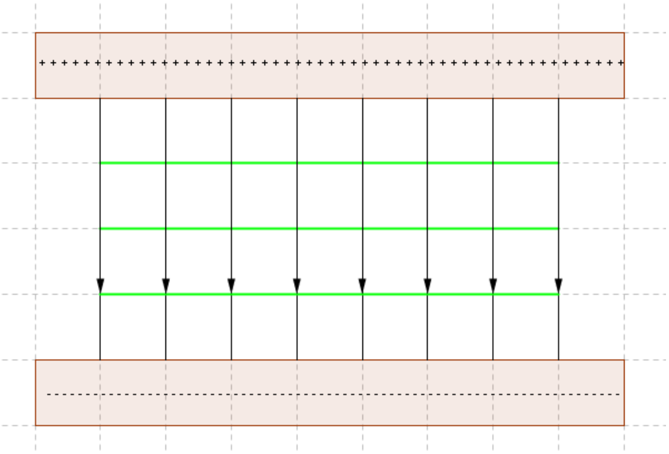
Lo ribadisco: **il potenziale è funzione unicamente del punto P** della regione R in cui è presente il campo elettrico.

## 8. Le superfici e le linee equipotenziali

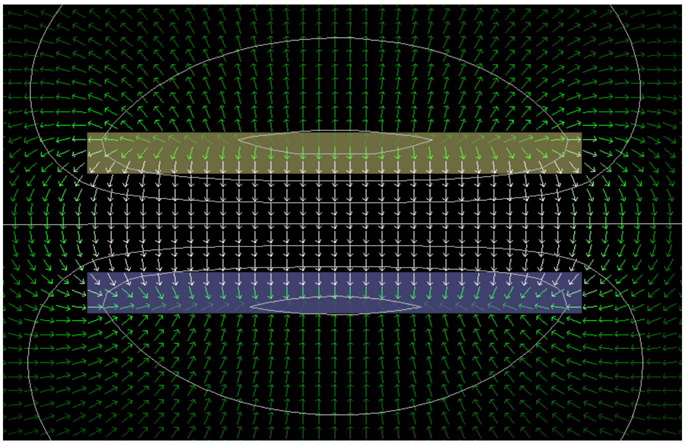
Una **superficie o linea equipotenziale** è una superficie oppure una linea i cui punti si trovano tutti al **medesimo potenziale.**

Nel caso del **campo uniforme** presente nella regione compresa tra le due lastre cariche, descritto nel paragrafo 4, le **linee equipotenziali** sono quelle tracciate in verde[15] nella figura che segue[16]:

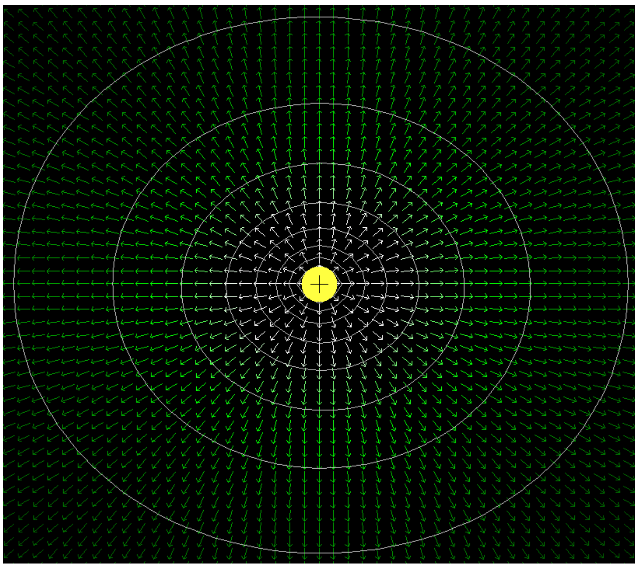
[14] Infatti si semplifica.
[15] Perché le linee equipotenziali sono proprio quelle?
[16] Parlo di linee equipotenziali poiché l'immagine che segue è in due dimensioni. Più correttamente, nel caso tridimensionale, avrei dovuto parlare di **piani equipotenziali**.



Se volessi tracciare le linee equipotenziali anche altrove, oltre che nella regione strettamente interna, e dunque **in prossimità dei bordi e all'esterno**, otterrei l'immagine che segue:



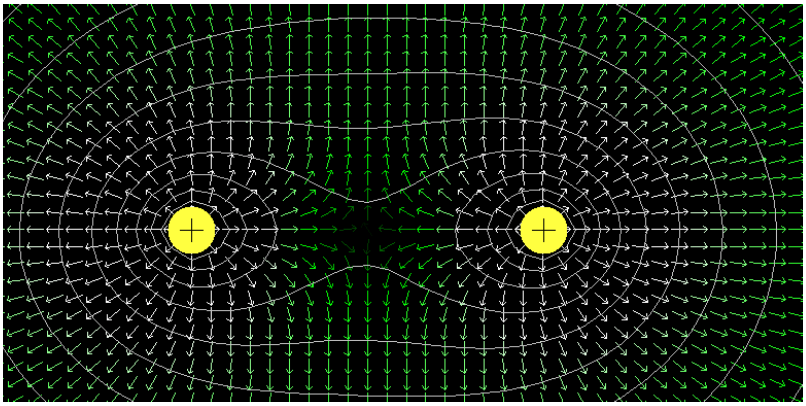
Nel caso trattato nel paragrafo 5, le linee equipotenziali sono invece delle **circonferenze** concentriche con la carica Q che genera il campo[17]:

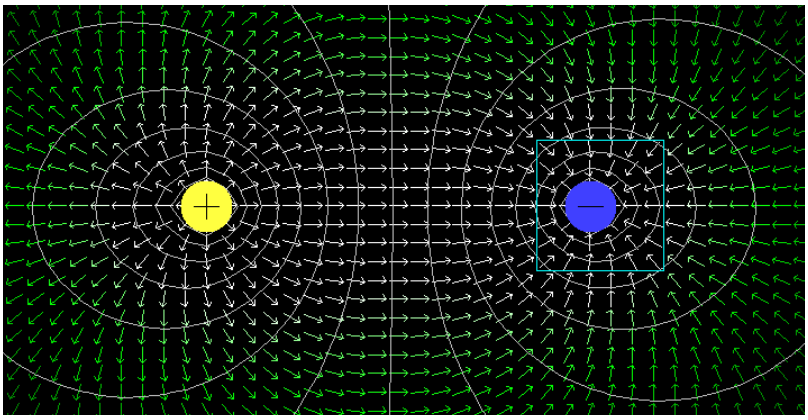


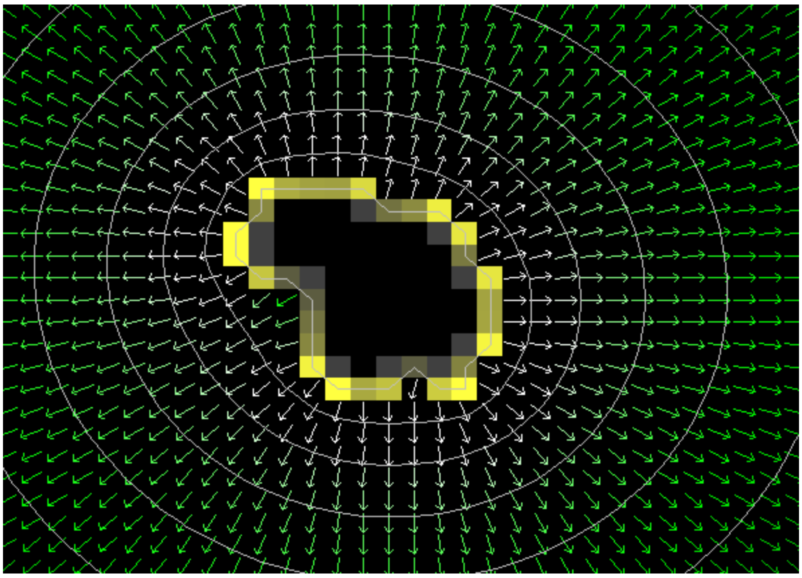
[17] Perché?

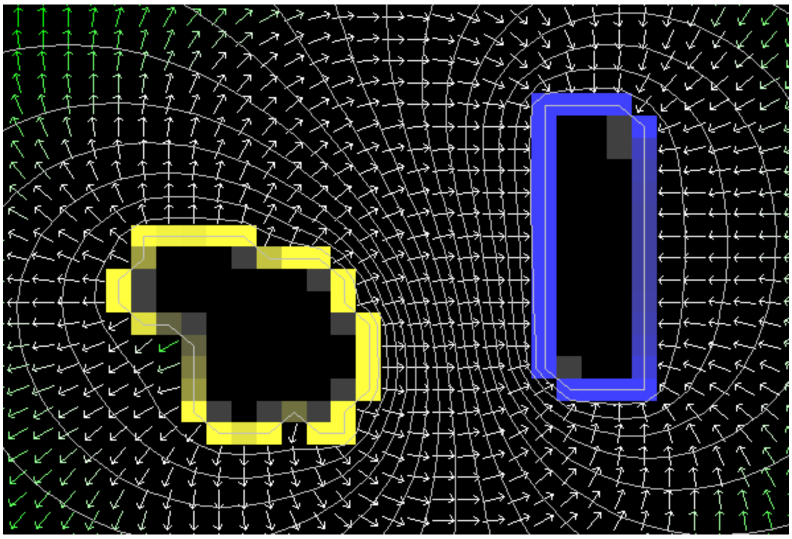
Nelle figure che seguono, puoi osservare, nell'ordine, i **vettori campo elettrico** $\vec{E}$ e le **linee equipotenziali** nel caso di una configurazione con

a) due cariche positive
b) una carica positiva e una negativa
c) di un conduttore carico positivamente
d) di due conduttori, uno carico positivamente, l'altro negativamente:





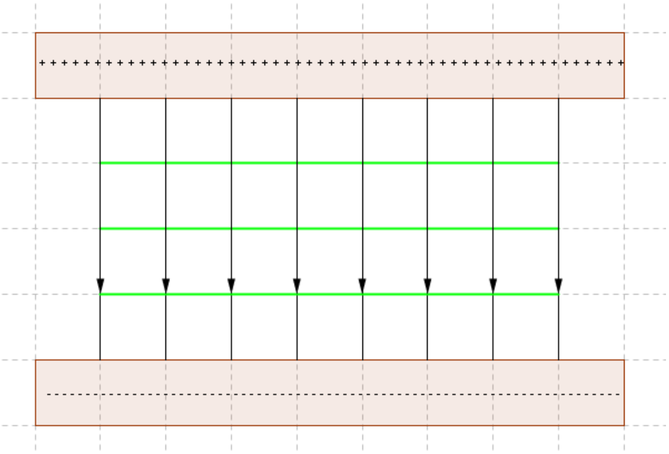




## 9. La relazione tra le linee di campo e le linee equipotenziali

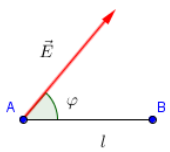
Se osservi con attenzione tutte le figure in cui compaiono le linee di campo e le linee equipotenziali, puoi accorgerti del fatto che esse sono **perpendicolari.**

La cosa è, ad esempio, palese nel caso del campo uniforme descritto nel paragrafo 2:



Dimostriamo allora che il vettore campo elettrico $\vec{E}$ in un punto è **localmente**[18] perpendicolare alla linea equipotenziale passante per quel punto.

A tale proposito, sia $\vec{E}$ il vettore campo elettrico nel punto A e $l$ un breve tratto della linea equipotenziale passante per A.
La brevità del tratto considerato ci consente di assimilarlo ad un segmento AB:




[18] Qual è il significato preciso di questo avverbio in questo contesto?

Calcolo il lavoro $L_{A \to B}(\vec{F})$ che la forza elettrica spende per trasportare una carica q dal punto A al punto B; e, per calcolare tale lavoro, utilizzo il tratto AB della linea equipotenziale:

$$L_{A \to B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = q\vec{E} \cdot \overrightarrow{AB} = U_A - U_B \qquad (9.1)$$

Dividendo entrambi i membri della (9.1) per q, ottengo:

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{U_A}{q} - \frac{U_B}{q} = V_A - V_B \qquad (9.2)$$

Ma A e B sono due punti di una linea equipotenziale e dunque $V_A = V_B$.
La (9.2) diventa così:

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \qquad (9.3)$$

e pertanto i due vettori $\vec{E}$ e $\overrightarrow{AB}$ sono perpendicolari, come dovevamo dimostrare.

## 10. Il significato fisico del potenziale elettrico

**Studiare il campo elettrico** presente in una regione Ω significa **determinare il vettore campo elettrico $\vec{E}$ in tutti i punti di Ω.**

Esiste però un **metodo alternativo** per studiare il campo elettrico, che consiste nell'**utilizzare il valore del potenziale in ogni punto della regione Ω.**

In altri termini: se conosco il valore del potenziale in ogni punto di Ω sono in grado di determinare il vettore campo elettrico $\vec{E}$ in tutti i punti di Ω e viceversa.

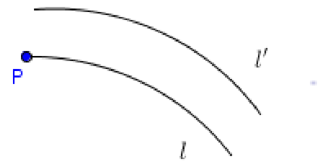
Pertanto: **la conoscenza di $\vec{E}$ oppure di V nella regione Ω è assolutamente equivalente.**

E' preferibile, in luogo di $\vec{E}$ , utilizzare il potenziale V poiché V è una grandezza scalare.

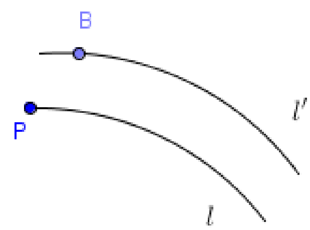
## 11. Dal potenziale V al vettore $\vec{E}$

Supponiamo di conoscere il valore del potenziale V in tutti i punti di una regione Ω.
Vediamo come risalire al vettore $\vec{E}$ in tutti i punti di quella regione.

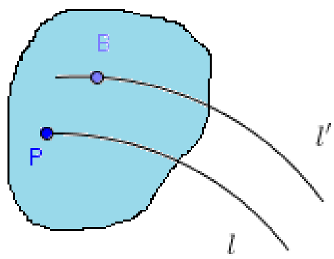
Prendo un generico punto P di Ω e considero un breve tratto della linea $l$ equipotenziale passante per P e una seconda linea $l'$, anch'essa equipotenziale, molto vicina alla linea $l$.




Calcolo il lavoro $L_{P\to B}(\vec{F})$ per trasportare una carica positiva q dal punto P ad un punto B di $l'$ molto vicino a P:

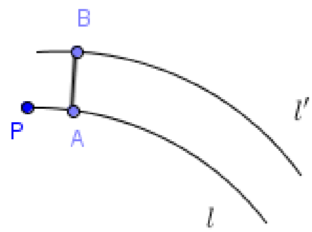



Posso supporre che il campo elettrico nella regione colorata in azzurro, visto le dimensioni ravvicinate dei punti in gioco, sia uniforme e, dunque, il vettore $\vec{E}$ costante:




Suppongo, infine, che il potenziale dei punti di $l$ sia maggiore del potenziale dei punti di $l'$.

Per calcolare $L_{P\to B}(\vec{F})$ utilizzo il cammino PAB in figura:




nel quale PA è assimilabile ad un segmento ed il punto A è il piede della perpendicolare condotta da B su PA.

Si ha:

$$L_{P\to B}(\vec{F}) = L_{P\to A}(\vec{F}) + L_{A\to B}(\vec{F}) \qquad (11.1)$$

Ma $L_{P\to A}(\vec{F}) = 0$ poiché il vettore $\vec{E}$ , e dunque il vettore $\vec{F}$, è perpendicolare al tratto PA.

Pertanto:

$$L_{P\to B}(\vec{F}) = L_{A\to B}(\vec{F}) = q \cdot \vec{E} \cdot \overrightarrow{AB} \qquad (11.2)$$

Ma $\vec{E}$ è parallelo al tratto AB[19] e dunque:

$$L_{P\to B}(\vec{F}) = L_{A\to B}(\vec{F}) = q \cdot \vec{E} \cdot \overrightarrow{AB} = q \cdot E \cdot AB = U_A - U_B \qquad (11.3)$$

Dividendo entrambi i membri della (11.3) per q, ottengo:

$$E \cdot \overline{AB} = \frac{U_A}{q} - \frac{U_B}{q} = V_A - V_B \qquad (11.4)$$

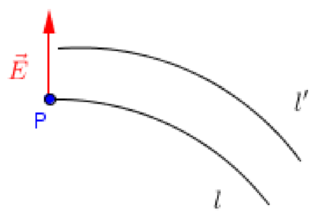
La (11.4) può essere posta nella forma:

$$E = -\frac{\Delta V}{\overline{AB}} \qquad (11.5)$$

La (11.5) ci fornisce il modulo del vettore $E$ nel punto P.

Per quanto riguarda la direzione di $\vec{E}$, essa, come sappiamo, è perpendicolare al tratto PA.
Il verso di $\vec{E}$ va dalla linea a potenziale maggiore, dunque $l$, alla linea a potenziale minore, dunque $l'$.

Ecco tracciato il vettore campo elettrico $\vec{E}$ in figura:




19 Perché?