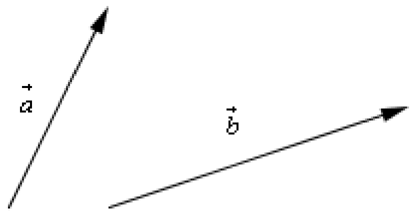
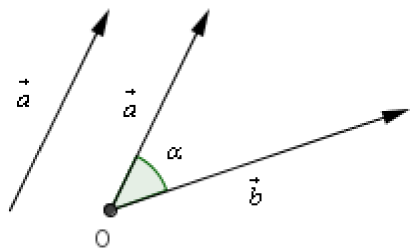
Lavoro ed energia

1. Premessa: il prodotto scalare di due vettori

Considero i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ nella figura sottostante:



Traslo uno dei due vettori, supponiamo $\vec{a}$, in modo tale che la coda di $\vec{a}$ coincida con la coda O di $\vec{b}$[1]:



In figura, ho indicato con α l'angolo minore tra i due vettori.

Per definizione, il **prodotto scalare**[2] **dei due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$** è il numero reale:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot cos(\alpha) \qquad (1)$$

a e b indicano rispettivamente, come sappiamo, il modulo dei due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

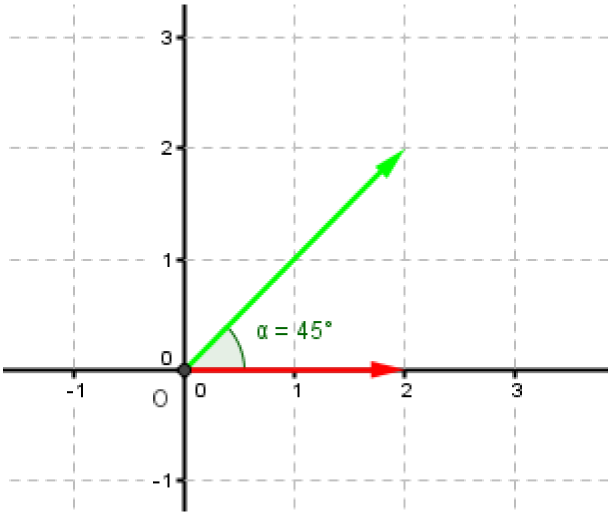
Osservo che il prodotto scalare di due vettori è positivo se $0 \le \alpha < 90°$, nullo se $\alpha = 90°$, negativo se $90° < \alpha \le 180°$: il segno dipende ovviamente dal coseno dell'angolo α.

[1] E' indifferente traslare l'uno o l'altro.
[2] L'aggettivo **scalare** indica che il prodotto dei due vettori dà come risultato un numero (reale).

La definizione (1), che appare strana e decisamente astratta – in classe mi sento spesso domandare: perché definire un prodotto tra vettori in questo modo? -, come avremo modo di vedere, è funzionale alla descrizione di alcuni fenomeni fisici.

2. Un esempio di calcolo di prodotto scalare

Considero i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ nella figura sottostante:



Il **prodotto scalare dei due vettori** $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vale:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot cos(\alpha) = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot cos(45°) = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4$$

3. Una proprietà del prodotto scalare

Il prodotto scalare è **distributivo rispetto alla somma di vettori**, cioè:

$$\vec{z} \cdot (\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n) = \vec{z} \cdot \vec{x}_1 + \vec{z} \cdot \vec{x}_2 + \cdots + \vec{z} \cdot \vec{x}_n \qquad (2)$$

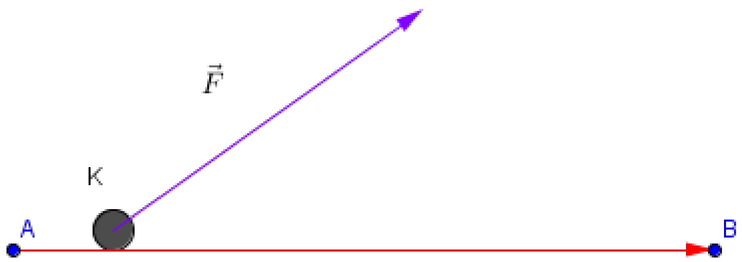
Non dimostriamo tale proprietà.

<u>Esercizio 1</u>

Dimostra la proprietà nel caso in cui $n = 2$ e $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ siano due vettori a piacere.

4. Il lavoro di una forza costante lungo uno spostamento

Un corpo K, appoggiato su un piano, effettua lo spostamento $\overrightarrow{\Delta x}$ e lungo tale spostamento agisce la **forza costante** $\vec{F}$:

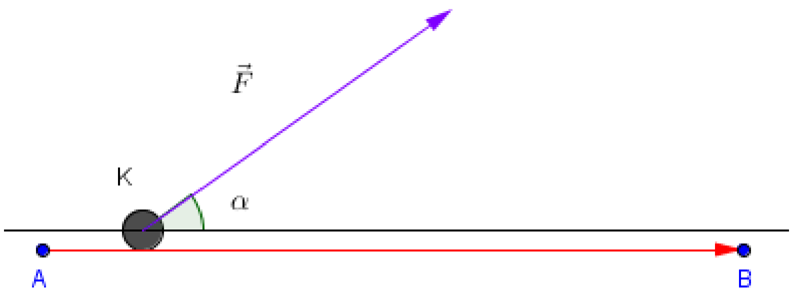


Ovviamente su K agiscono anche altre forze[3], ma sto concentrando la mia attenzione solamente sulla forza $\vec{F}$.

Per definizione, il **lavoro della forza $\vec{F}$ lungo lo spostamento $\overrightarrow{\Delta x}$** è il prodotto scalare

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta x} \qquad (3)$$

Se α è l'angolo compreso tra i due vettori $\vec{F}$ e $\overrightarrow{\Delta x}$:



l'espressione (3) diventa:

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta x} = F \cdot \Delta x \cdot cos(\alpha) \qquad (4)$$

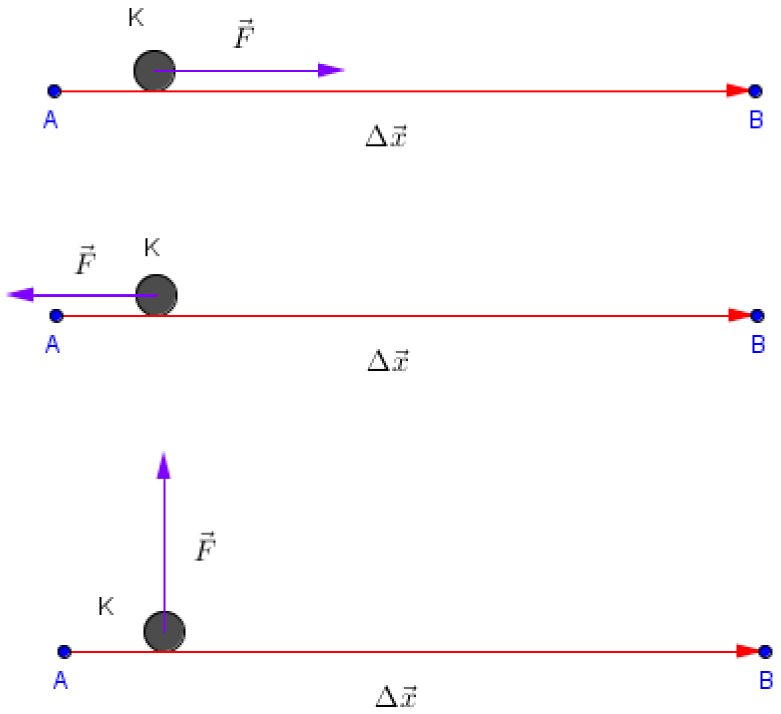
Il lavoro, in accordo con la (4), si calcola in $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$ e la sua **unità di misura** nel S.I. prende il nome di **joule** (simbolo: J). Pertanto, $1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$.

[3] quali?

Il lavoro è dunque una **grandezza scalare**.

<u>Esercizio 2</u>

Calcola il lavoro della forza costante $\vec{F}$ lungo lo spostamento $\overrightarrow{\Delta x}$ nei tre casi seguenti:



5. Il calcolo del lavoro della risultante di un insieme di forze lungo uno spostamento

Siano $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ tutte le n forze agenti sul corpo K.

La **risultante** di queste forze è allora la forza:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n \qquad (5)$$

Suppongo che sotto l'azione della risultante $\vec{R}$ il corpo K esegua lo spostamento $\overrightarrow{\Delta x}$.

Il lavoro della risultante $\vec{R}$ lungo lo spostamento $\overrightarrow{\Delta x}$ è per definizione:

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \overrightarrow{\Delta x} \qquad (6)$$

Sostituisco la (5) nella (6) in luogo di $\vec{R}$:

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = (\vec{F}_1, +\vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n) \cdot \overrightarrow{\Delta x}$$

e applico la proprietà distributiva del prodotto scalare[4]:

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = \vec{F}_1 \cdot \overrightarrow{\Delta x} + \vec{F}_2 \cdot \overrightarrow{\Delta x} + \cdots + \vec{F}_n \cdot \overrightarrow{\Delta x}$$

Ottengo così:

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{F}_1) + L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{F}_2) + \cdots L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{F}_n) \qquad (7)$$

La (7) dice che è possibile calcolare il lavoro della risultante lungo uno spostamento come somma dei lavori di tutte le forze che compongono la risultante lungo il medesimo spostamento.

Nulla vieta ovviamente di calcolare il lavoro della risultante lungo uno spostamento mediante l'utilizzo della formula (6).

In molti casi, però, l'utilizzo della (7) rende il calcolo più agevole.

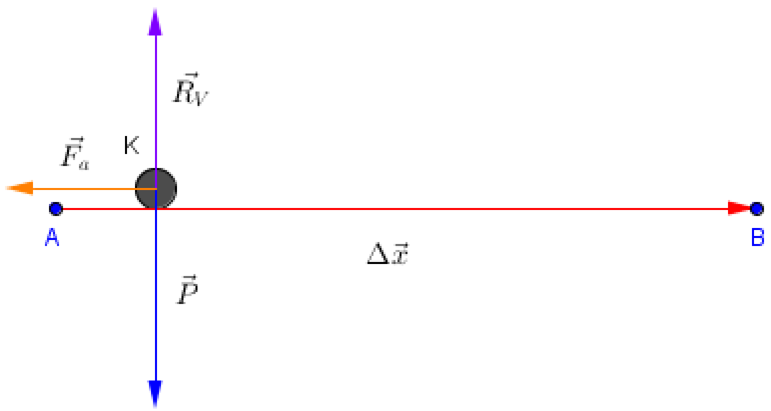
6. Un esempio di calcolo del lavoro della risultante di un insieme di forze lungo uno spostamento

Illustro la teoria svolta nel §5 con un esempio.

Considero un corpo K, ad esempio una biglia di vetro, che si muove di moto rettilineo lungo il piano su cui è appoggiata.

La biglia compie un tratto $\overrightarrow{\Delta x} = \overrightarrow{AB}$ e poi si ferma.

Il **diagramma delle forze** agenti sulla biglia è il seguente:



[4] vedi §3.

Le tre forze agenti – sto trascurando la resistenza dell'aria – sono:

1. la forza peso $\vec{P}$

2. la reazione vincolare $\overrightarrow{R_V}$

3. la forza di attrito $\overrightarrow{F_a}$

Calcolo il lavoro della risultante $\vec{R}$ delle tre forze.

Applico la (7) ed ottengo:

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{P}) + L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\overrightarrow{R_V}) + L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{F_a}) \qquad (8)$$

I primi due addendi della (8) valgono zero poiché le due forze $\vec{P}$ e $\overrightarrow{R_V}$ sono perpendicolari allo spostamento[5] e dunque:

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{F_a}) = \vec{F_a} \cdot \overrightarrow{\Delta x} = F_a \cdot \Delta x \cdot cos(180°) = -F_a \cdot \Delta x \qquad (9)$$

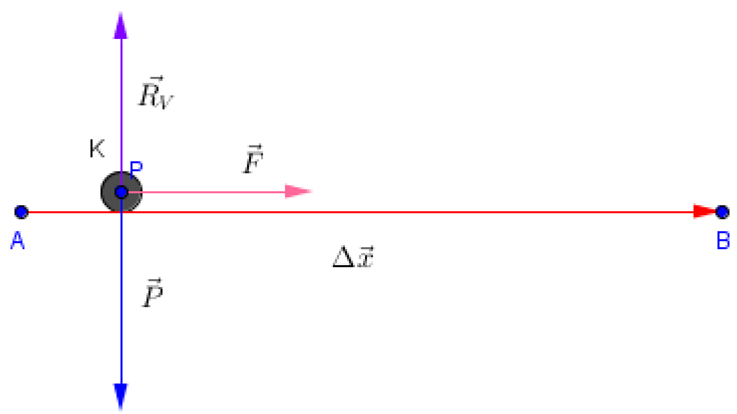
Ad esempio, se $F_a = 4 \text{ N}$ e $\Delta x = 6 \text{ m}$ il lavoro della risultante vale -24 J.

Il lavoro è negativo poiché la forza di attrito "si oppone" al moto, è cioè una forza frenante.

7. Il legame tra il lavoro della risultante e la velocità

In questo paragrafo inizierò a dare *concretezza* alla nozione di **lavoro**, correlandola con la **velocità** che possiede il corpo in movimento.

Considero al situazione fisica in figura:



[5] L'angolo tra forza e spostamento è retto e cos (90°) = 0.

nella quale sul corpo K agiscono la forza peso $\vec{P}$, la reazione vincolare $\overrightarrow{R_V}$ e la forza costante $\vec{F}$. Trascuro la forza di attrito e la resistenza dell'aria.

La risultante $\vec{R}$ in questo caso coincide con la forza $\vec{F}$.[6]

La forza costante $\vec{F}$ fa acquistare al corpo un'accelerazione costante[7] $\vec{a}$, che ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore forza[8] e il cui valore è indifferentemente $\frac{F}{m}$ oppure[9]

$$a = \frac{v_B - v_A}{t} \qquad (10).$$

Nella (10) t è l'intervallo di tempo trascorso e v_A e v_B sono rispettivamente i valori delle velocità che il corpo possiede nelle posizioni A e B.

Calcolo il lavoro della risultante lungo lo spostamento $\overrightarrow{\Delta x} = \overrightarrow{AB}$:

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta x} = F \cdot \Delta x \cdot cos(0°) = F \cdot \Delta x \qquad (11)$$

Vado a manipolare il prodotto $F \cdot \Delta x$ che compare nella (11).

Il modulo della forza $\vec{F}$ vale

$$F = m \cdot a \qquad (12)$$

mentre lo spostamento Δx nel moto uniformemente accelerato si calcola con la formula:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 + v_A t \qquad (13).$$

Sostituendo la (12) e la (13) nella (11), ottengo:

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = F \cdot \Delta x = ma \cdot \left(\frac{1}{2} a t^2 + v_A t\right) \qquad (14)$$

Nella (14) raccolgo la variabile t:

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = ma \cdot t \left(\frac{1}{2} a t + v_A\right) \qquad (15)$$

e vado a sostituire la formula (10):

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = m \cdot \frac{v_B - v_A}{t} \cdot t \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{v_B - v_A}{t} t + v_A\right)$$

---

[6] Perché?

[7] Il moto di K è pertanto **uniformemente accelerato**.

[8] Perché?

[9] La (10) è proprio la definizione di accelerazione media.

Si ha quindi:

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = m \cdot (v_B - v_A) \cdot \left(\frac{1}{2} v_B - \frac{1}{2} v_A + v_A\right) =$$

$$m \cdot (v_B - v_A) \cdot \left(\frac{1}{2} v_B + \frac{1}{2} v_A\right) = \frac{1}{2} m \cdot (v_B - v_A) \cdot (v_B + v_A) =$$

$$\frac{1}{2} m \cdot ({v_B}^2 - {v_A}^2)$$

Infine:

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = \frac{1}{2} m{v_B}^2 - \frac{1}{2} m{v_A}^2 \qquad (16)$$

La formula (17) correla il lavoro della risultante lungo lo spostamento $\overrightarrow{\Delta x} = \overrightarrow{AB}$ e i valori della velocità inizale e finale del corpo.

8. L'energia cinetica di un corpo

Do un nome al prodotto $\boldsymbol{\frac{1}{2} m v^2}$ che compare nel secondo membro della (16).

Se il corpo K ha massa m e possiede la velocità v, dico che la sua **energia cinetica** vale:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (17)$$

L'unità di misura dell'energia cinetica è uguale per la (16) a quella del lavoro ed è dunque il **joule**.

Ad esempio, se $m = 80$ kg e $v = 4\ \frac{m}{s}$ il corpo K possiede una energia cinetica pari a 640 J.

9. Il Teorema dell'energia cinetica

La definizione (17) consente di riscrivere la (16) in una forma più compatta:

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = E_{CB} - E_{CA} \qquad (18)$$

Nella (18) ovviamente E_{CB} indica l'energia cinetica nel punto B e E_{CA} l'energia cinetica nel punto A.

Poiché A e B sono rispettivamente il punto iniziale e finale dello spostamento, la (18) assume la forma definitiva:

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = \Delta E_C \qquad (19),$$

nella quale ΔE_C indica **la variazione di energia cinetica** del corpo in movimento.

Posso dunque enunciare il:

Teorema dell'energia cinetica (forma base)

Siano $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ tutte le n forze applicate al corpo K e siano tali forze costanti.

Il lavoro della risultante $\vec{R}$ lungo lo spostamento $\overrightarrow{\Delta x}$ eguaglia la variazione di energia cinetica del corpo K.

In formule: $L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = \Delta E_C$.

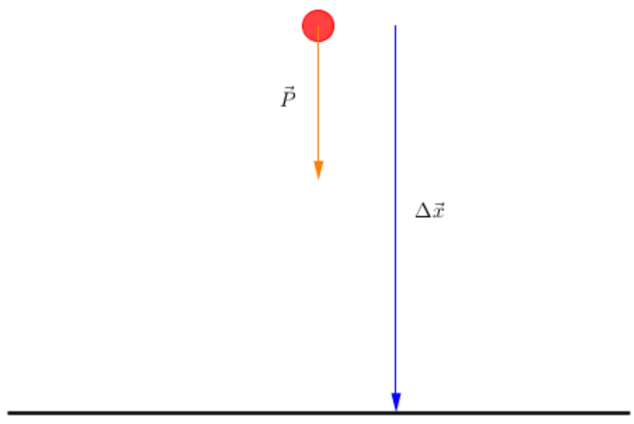
Il Teorema dell'energia cinetica, anche se dimostrato nella particolare configurazione fisica descritta nel §7, **ha validità generale**.

10. Esempi di applicazione del Teorema dell'energia cinetica

Esempio 1

Il corpo K , fermo, è situato ad un'altezza $h = \Delta x$ dal suolo.

Nel caso ideale, non considerando cioè gli attriti, **l'unica forza agente è la forza peso $\vec{P}$**.



Voglio determinare la velocità v con cui il corpo, lasciato libero di cadere, raggiunge il suolo.

A tale proposito, calcolo il lavoro $\vec{P}$ della forza peso lungo lo spostamento $\overrightarrow{\Delta x}$.
Si ha:

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{\Delta x} = P \cdot \Delta x \cdot cos(0°) = P \cdot \Delta x \qquad (20)$$

Il Teorema dell'energia cinetica dice che[10]

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{P}) = \Delta E_C = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (21)$$

Comparando la (20) e la (21) ottengo:

$$\frac{1}{2}mv^2 = P \cdot \Delta x$$

e dunque:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

da cui ricavo:

$$v^2 = 2gh$$

ed infine:

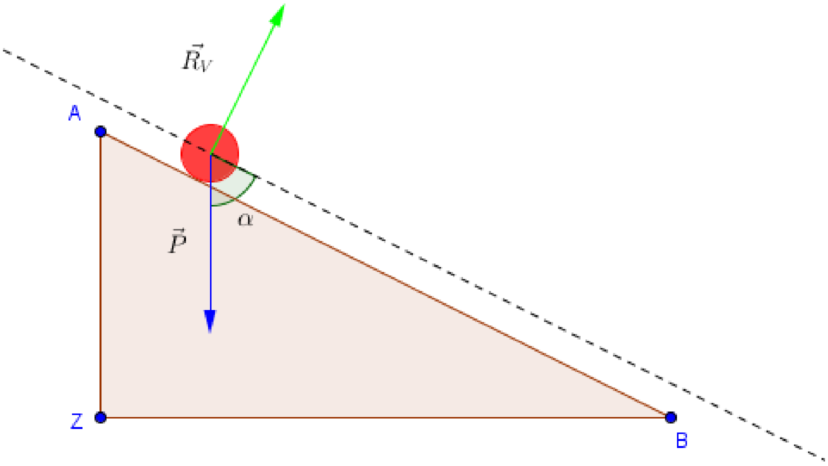
$$v = \sqrt{2gh} \qquad (22)$$

La formula (22) è il *ben noto* valore della velocità con cui il corpo raggiunge il suolo.

<u>Esempio 2</u>

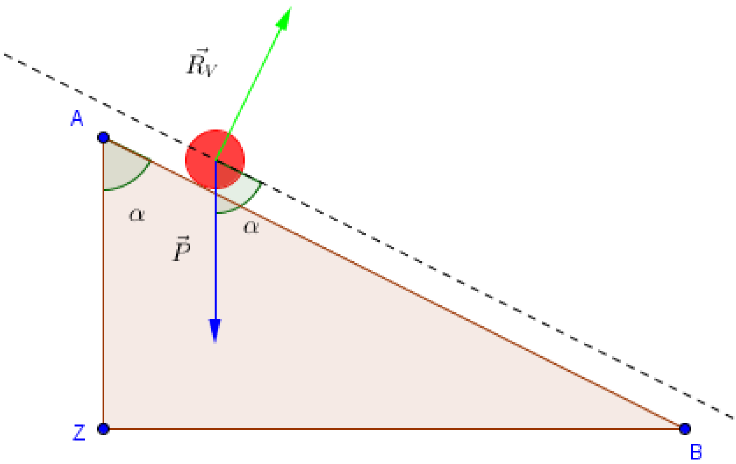
Il corpo K, parte da fermo dalla sommità di un piano inclinato di altezza h e lunghezza $l = \Delta x$.
Voglio calcolare, in assenza di attriti, **la velocità con cui il corpo raggiunge la base del piano**.

[10] Ricorda che l'energia cinetica iniziale è nulla essendo il corpo fermo.



Le forze agenti sono il **peso** $\vec{P}$ e la **reazione vincolare** $\overrightarrow{R_V}$; lo **spostamento** è il vettore $\overrightarrow{\Delta x} = \overrightarrow{AB}$.

Osservo che l'angolo[11] $Z\hat{A}B \cong \alpha$:



Calcolo il lavoro della risultante $\overrightarrow{R}$ lungo lo spostamento $\overrightarrow{\Delta x}$. Si ha:

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{P}) + L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\overrightarrow{R_V})^{12} = L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{\Delta x} = P \cdot \Delta x \cdot cos(\alpha) \qquad (23)$$

e, per il Teorema dei triangoli rettangoli:

$$\overline{AZ} = \overline{AB} \cdot cos(\alpha),$$

cioè

$$h = l \cdot \ cos(\alpha) \ ,$$

da cui ricavo:

$$cos(\alpha) = \frac{h}{l} \qquad (24)$$

[11] perché?
[12] Il secondo addendo è nullo: perché?

Utilizzando la (24), la (23) diventa:

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = P \cdot \Delta x \cdot \frac{h}{l} = mg \cdot l \cdot \frac{h}{l} = mgh \qquad (25)$$

Il Teorema dell'energia cinetica dice che

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = \Delta E_C = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (26)$$

Comparando la (25) e la (26) ottengo:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

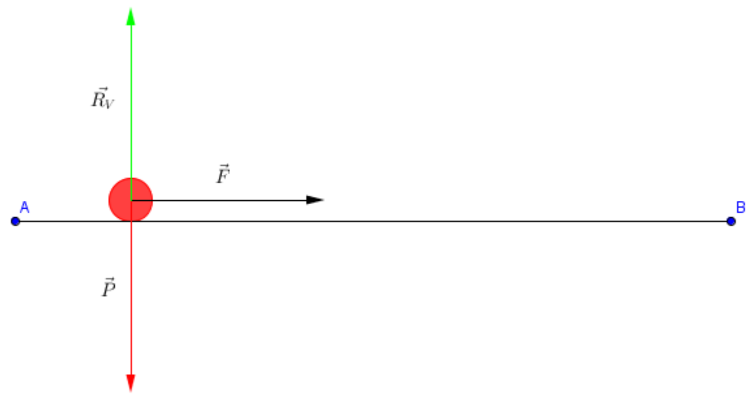
e i calcoli, perefettamente analoghi a quelli dell'Esempio 1, conducono al risultato (22).

Pertanto, nel caso ideale in cui non si considerino attriti, un corpo che cade da un'altezza h raggiunge il suolo con la velocità (22), **sia che esso cada lungo la verticale sia che scenda lungo un piano inclinato di qualsivoglia pendenza**.

In questo secondo caso, la minore accelerazione di discesa[13] rispetto all'accelerazione di caduta libera g è compensata dalla maggiore lunghezza del tragitto.

<u>Esempio 3</u>

Un corpo K si muove lungo la direzione orizzontale, in assenza di attriti, sotto l'azione delle forze in figura:



Come di consueto, $\vec{P}$ è la forza peso e $\overrightarrow{R_V}$ la reazione vincolare. $\vec{F}$ è una forza costante applicata al corpo.

[13] Rammenti il valore di questa accelerazione?

Suppongo che il corpo K possieda la velocità iniziale v_A. Voglio **calcolare la velocità di K nel punto finale B**.

Calcolo il lavoro della risultante $\vec{R}$ lungo lo spostamento $\overrightarrow{\Delta x} = \overrightarrow{AB}$. Si ha:

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{P}) + L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\overrightarrow{R_V}) + L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{F}) = L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta x} = F \cdot \Delta x \cdot cos(0°) = F \cdot \Delta x \qquad (27)$$

Calcolo la variazione di energia cinetica del corpo:

$$\Delta E_C = \frac{1}{2} m {v_B}^2 - \frac{1}{2} m {v_A}^2 \qquad (28)$$

Il teorema dell'energia cinetica porge l'equazione:

$$\frac{1}{2} m {v_B}^2 - \frac{1}{2} m {v_A}^2 = F \cdot \Delta x \qquad (29)$$

Manipolo algebricamente la (29):

$$m {v_B}^2 - m {v_A}^2 = 2F\Delta x$$

$$m {v_B}^2 = m {v_A}^2 + 2F\Delta x$$

$${v_B}^2 = {v_A}^2 + 2\frac{F}{m}\Delta x$$

e infine:

$$v_B = \sqrt{{v_A}^2 + 2\frac{F}{m}\Delta x} \qquad (30)$$

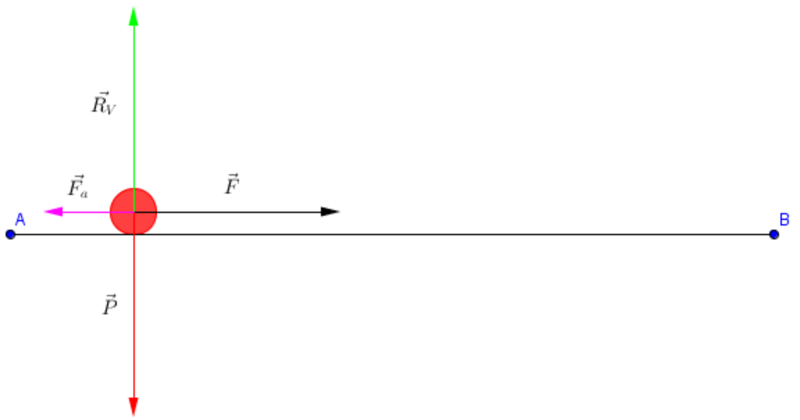
La (30) fornisce il valore della velocità nel punto B.

Osservo che $\frac{F}{m} = a$ è proprio il valore dell'accelerazione con cui si muove il punto K. La (30) può essere dunque riscritta nel modo seguente:

$$v_B = \sqrt{{v_A}^2 + 2a\Delta x} \qquad (31)$$

<u>Esempio 4</u>

Un corpo K si muove lungo la direzione orizzontale sotto l'azione delle forze in figura:



La situazione è pressochè identica a quella dell'Esempio 3 eccetto che per l'azione della forza di attrito $\overrightarrow{F_a}$.

Suppongo che il corpo K possieda la velocità iniziale v_A. Voglio **calcolare la velocità di *K* nel punto finale *B*.**

Calcolo il lavoro della risultante $\vec{R}$ lungo lo spostamento $\overrightarrow{\Delta x} = \overrightarrow{AB}$. Si ha:

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{P}) + L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\overrightarrow{R_V}) + L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{F}) + L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\overrightarrow{F_a}) =$$

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{F}) + L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\overrightarrow{F_a}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta x} + \vec{F_a} \cdot \overrightarrow{\Delta x} =$$

$$F \cdot \Delta x \cdot cos(0°) + F_a \cdot \Delta x \cdot cos(180°) = F \cdot \Delta x - F_a \cdot \Delta x =$$

$$= (F - F_a) \cdot \Delta x \qquad (32)$$

Calcolo la variazione di energia cinetica del corpo:

$$\Delta E_C = \frac{1}{2} m {v_B}^2 - \frac{1}{2} m {v_A}^2 \qquad (33)$$

Il teorema dell'energia cinetica porge l'equazione:

$$\frac{1}{2} m {v_B}^2 - \frac{1}{2} m {v_A}^2 = (F - F_a) \cdot \Delta x \qquad (34)$$

Manipolo algebricamente la (34):

$$m {v_B}^2 - m {v_A}^2 = 2(F - F_a)\, \Delta x$$

$$m {v_B}^2 = m {v_A}^2 + 2(F - F_a)\, \Delta x$$

$$ {v_B}^2 = {v_A}^2 + 2\, \frac{F - F_a}{m}\, \Delta x$$

e infine:

$$v_B = \sqrt{{v_A}^2 + 2\frac{F - F_a}{m}\,\Delta x} \qquad (35)$$

11. Un osservazione sul Teorema dell'energia cinetica

Come abbiamo visto nei quattro esempi sviluppati nel §10, la formula (19):

$$L_{\overrightarrow{\Delta x}}(\vec{R}) = \Delta E_C$$

mette a disposizione **una equazione che può essere applicata, per il momento, in tutte quelle situazioni fisiche nelle quali sul corpo che stiamo considerando agiscono unicamente forze costanti.**

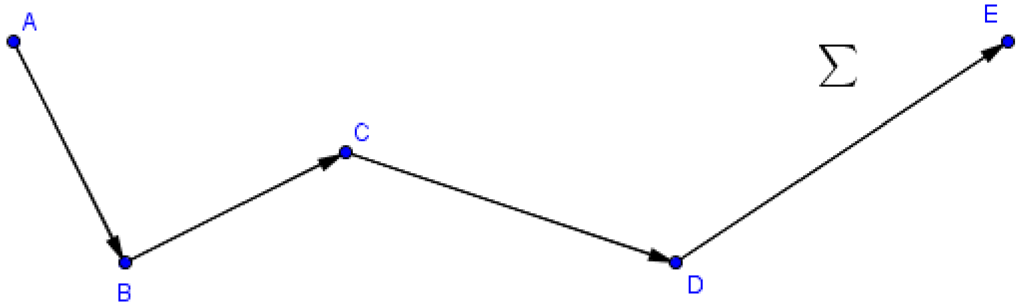
L'**efficacia** di tale equazione appare evidente.

Ed uno degli ingredienti della (19) è proprio la nozione di lavoro: una nozione astratta che ha portato in dote **risultati decisamente concreti**.

12. Il lavoro di una forza costante lungo una spezzata

Estendo la nozione di lavoro di una forza costante al caso in cui il cammino del corpo coincida con una **spezzata**.

Una **spezzata è un insieme di vettori consecutivi**.



Nella figura sopra, la **spezzata** Σ ha quattro **lati**: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$.

Il **punto iniziale** di Σ è A; quello **finale** E.

A ed E sono gli **estremi** della spezzata.

In questo caso, posso anche indicare la spezzata con il simbolo $\Sigma(A, E)$ oppure con $\Sigma\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}\right)$.

Nel primo caso metto in evidenza gli estremi della spezzata; nel secondo, i lati.

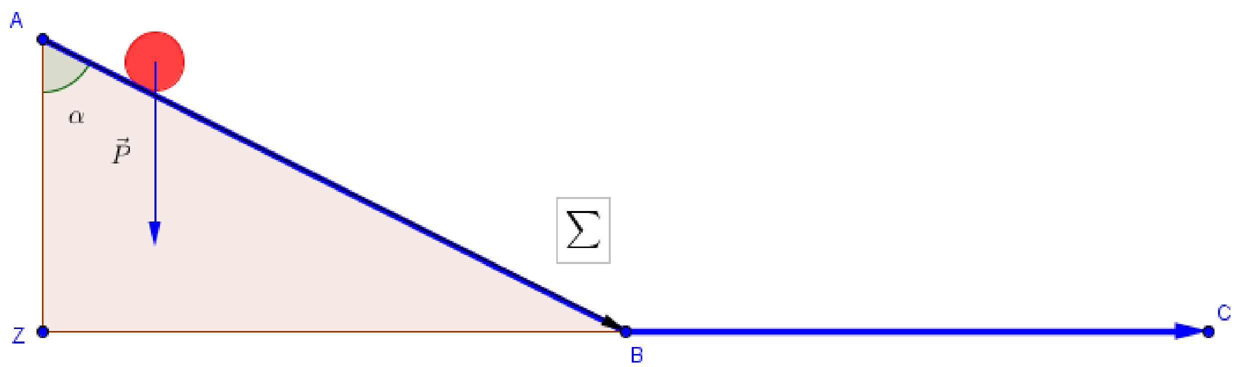
Per definizione, il **lavoro della forza costante $\vec{F}$ lungo la spezzata $\Sigma(\Delta\overrightarrow{x_1}, \Delta\overrightarrow{x_2}, \dots, \Delta\overrightarrow{x_n})$** è il numero:

$$L_\Sigma(\vec{F}) = L_{\Delta\overrightarrow{x_1}}(\vec{F}) + L_{\Delta\overrightarrow{x_2}}(\vec{F}) + \cdots + L_{\Delta\overrightarrow{x_n}}(\vec{F}) \qquad (36)$$

La (36) è la *naturale evoluzione* della nozione di lavoro di una forza costante lungo uno spostamento.

13. Un esempio di calcolo del lavoro di una forza lungo una spezzata

Calcolo, a titolo di esempio, il lavoro della forza peso $\vec{P}$ lungo la spezzata $\Sigma\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$ in figura:



Si ha:

$$L_\Sigma(\vec{P}) = L_{\overrightarrow{AB}}(\vec{P}) + L_{\overrightarrow{BC}}(\vec{P}) \qquad (37)$$

Nell'Esempio 2 di pag. 5 ho dimostrato che[14] $L_{\overrightarrow{AB}}(\vec{P}) = mgh$; inoltre $L_{\overrightarrow{BC}}(\vec{P}) = 0$, vista la perpendicolarità di $\vec{P}$ e $\overrightarrow{BC}$.

Pertanto, $L_\Sigma(\vec{P}) = mgh$.

[14] h è l'altezza del piano inclinato.

Prova a calcolare il lavoro della forza peso $\vec{P}$ lungo le due spezzate[15] $\Sigma_1(\overrightarrow{AZ}, \overrightarrow{ZB}, \overrightarrow{BC})$ e $\Sigma_2(\overrightarrow{AC})$. Cosa noti? Che congettura puoi fare?

14. Il Teorema della spezzata

Il calcolo del lavoro di una forza costante lungo una spezzata, e dunque lungo uno spostamento, è davvero molto semplice se si utilizza il risultato che segue[16]:

Teorema della spezzata[17]

Siano $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ gli estremi[18] di una qualunque spezzata $\Sigma(A, B)$ che ha A come punto iniziale e B come punto finale.
Sia inoltre $\vec{F} = F_x\,\vec{\imath} + F_y\,\vec{\jmath}$ una forza costante.

Allora:

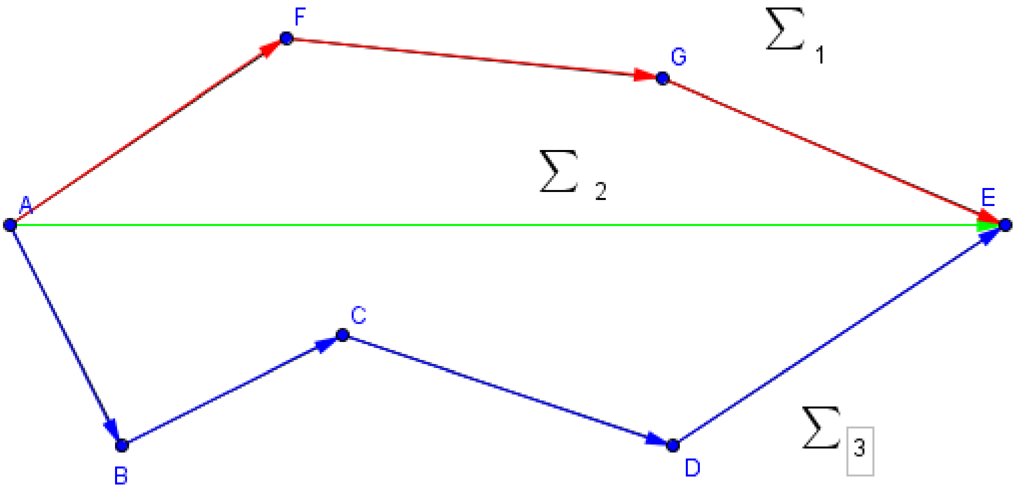
$$L_{\Sigma(A,B)}(\vec{F}) = F_x \cdot \Delta x + F_y \cdot \Delta y \qquad (38),$$

dove $\Delta x = x_B - x_A$ e $\Delta y = y_B - y_A$.

Il Teorema in questione afferma che il lavoro di una forza costante lungo una qualunque spezzata Σ che abbia come estremi i punti A e B **non dipende affatto dalla spezzata Σ ma unicamente dai punti iniziale e finale della stessa**.

Pertanto, con riferimento alla figura:

[15] Una spezzata può avere, come caso particolare anche un solo lato.
[16] La dimostrazione del Teorema della spezzata è semplice e te la lascio come esercizio.
[17] Il nome è mio.
[18] Ho collocato punti e vettori in un piano cartesiano.



si ha:

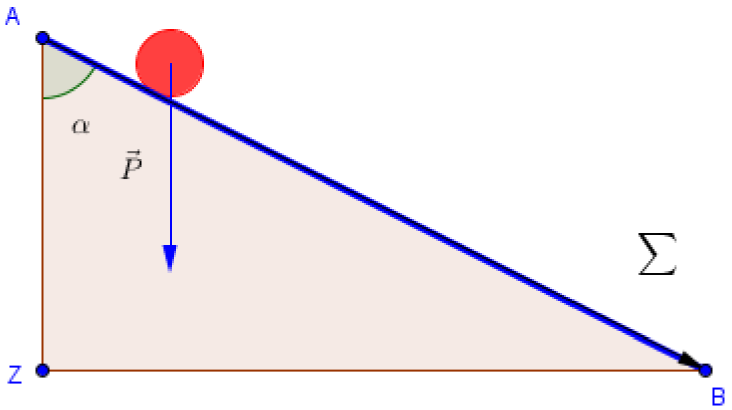
$$L_{\Sigma_1}(\vec{F}) = L_{\Sigma_2}(\vec{F}) = L_{\Sigma_3}(\vec{F})$$

Questo è un grande risultato poiché ci dice che per calcolare il lavoro di una forza costante lungo una qualsiasi spezzata che abbia come estremi i due punti A e B **è sufficiente scegliere una spezzata qualunque che unisca i due punti** – la più semplice…- e calcolare il lavoro lungo quella spezzata.

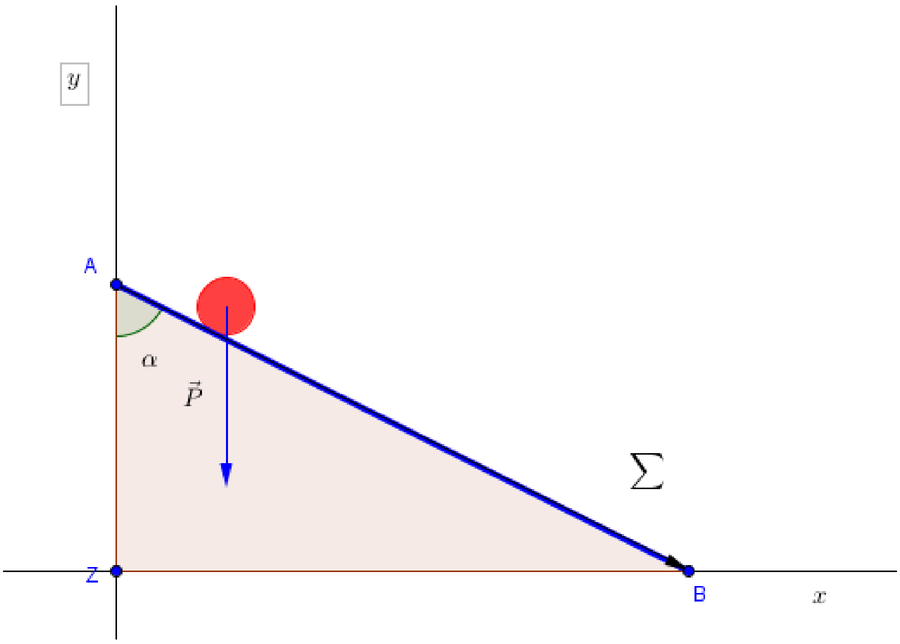
15. Esempi di applicazione del Teorema della spezzata

<u>Esempio 1</u>

Calcolo il lavoro della forza peso $\vec{P}$ lungo lo spostamento $\overrightarrow{AB}$ in figura:



Inserisco la figura in un piano cartesiano:



Allora: $A = (0, h)$, $B = (x_B, 0)$ e $\vec{P} = 0\,\vec{\imath} - mg\,\vec{\jmath}$.

Ne segue: $\Delta x = x_B - 0 = x_B$ e $\Delta y = 0 - h = -h$.

Inoltre, $F_x = 0$ e $F_y = -mg$.

La formula (38) porge infine:

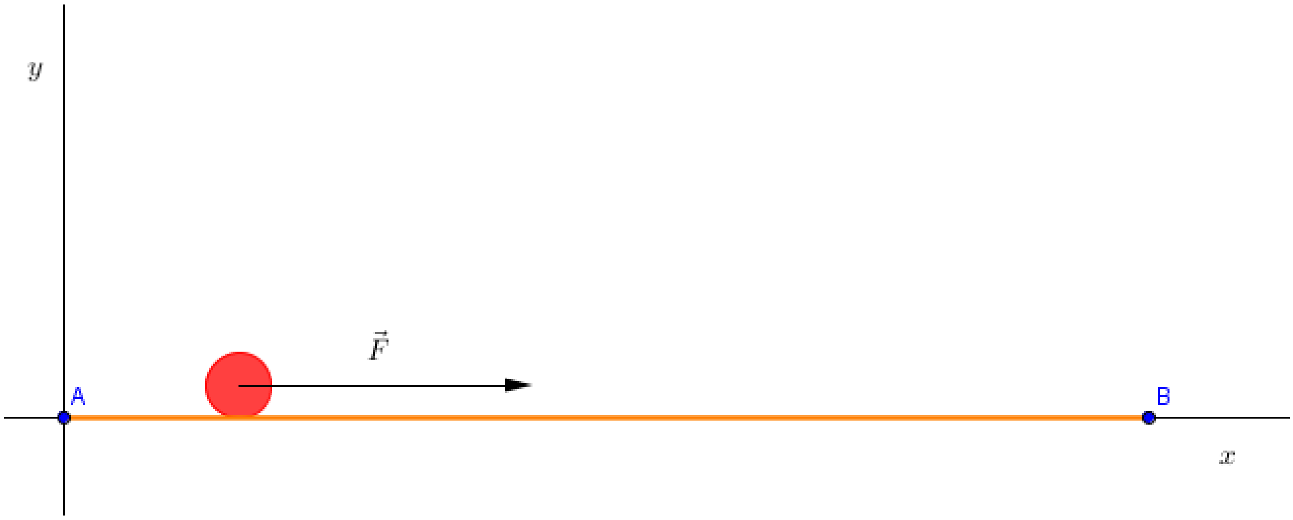
$$L_{\Sigma(A,B)}(\vec{F}) = F_x \cdot \Delta x + F_y \cdot \Delta y = 0 \cdot x_B + (-mg) \cdot (-h) = mgh,$$

risultato che ovviamente coincide con la (25).

<u>Esempio 2</u>

Calcolo il lavoro della forza $\vec{F}$ lungo lo spostamento $\overrightarrow{AB}$ nel caso della situazione fisica rappresentata nella figura sottostante:

Inserisco tutti gli oggetti in un piano cartesiano:



Allora: $A = (0,0)$, $B = (x_B, 0)$ e $\vec{F} = F\,\vec{\imath} + 0\,\vec{\jmath}$.

Ne segue: $\Delta x = x_B - 0 = x_B$ e $\Delta y = 0 - 0 = 0$.

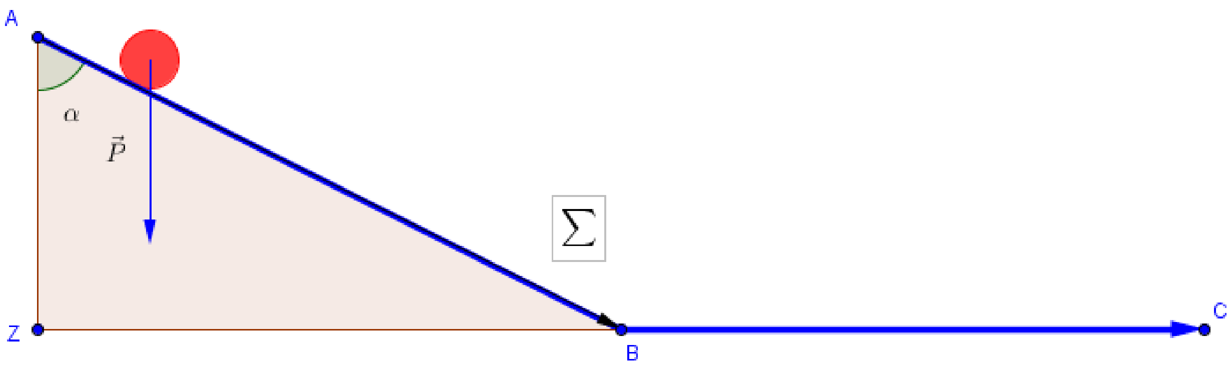
Inoltre, $F_x = F$ e $F_y = 0$.

La formula (38) porge infine:

$$L_{\overrightarrow{AB}}(\vec{F}) = F_x \cdot \Delta x + F_y \cdot \Delta y = F \cdot x_B + 0 \cdot 0 = F \cdot x_B$$

<u>Esercizio</u>

Calcola, utilizzando il Teorema della spezzata, il lavoro della forza peso $\vec{P}$ lungo la spezzata $\Sigma(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ in figura:

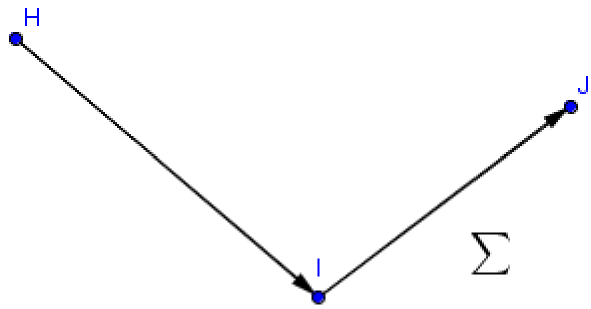


e confronta il risultato con il valore ottenuto nel §13.

16. Il Teorema dell'energia cinetica per una spezzata

E' valido il Teorema dell'energia cinetica per una spezzata?
In altri termini, il lavoro della risultante di un insieme di forze costanti lungo una spezzata eguaglia ancora la variazione di energia cinetica del corpo cui è applicata la risultante?

Calcolo il lavoro della risultante $\vec{R}$ lungo la spezzata Σ in figura:



$$L_\Sigma(\vec{R}) = L_{\overrightarrow{\mathrm{HI}}}(\vec{R}) + L_{\overrightarrow{\mathrm{IJ}}}(\vec{R}) \qquad (39)$$

Per il Teorema dell'energia cinetica:

$$L_{\overrightarrow{\mathrm{HI}}}(\vec{R}) = E_C(I) - E_C(H)$$

$$L_{\overrightarrow{\mathrm{IJ}}}(\vec{R}) = E_C(J) - E_C(I)$$

Pertanto,

$$L_\Sigma(\vec{R}) = E_C(I) - E_C(H) + E_C(J) - E_C(I) = E_C(J) - E_C(H) = \Delta E_C \qquad (40)$$

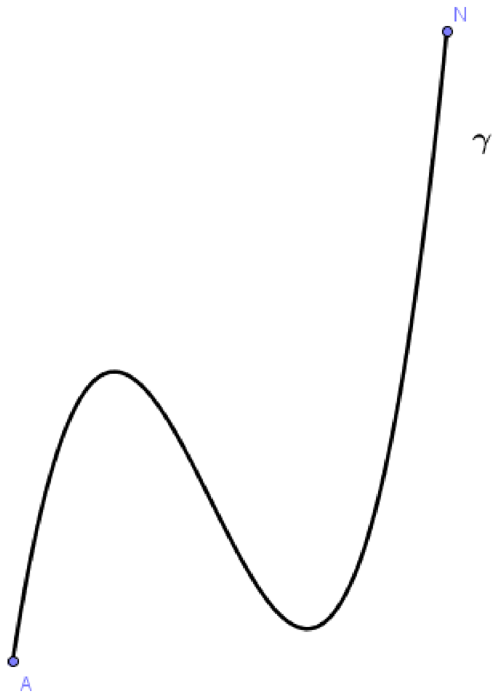
La (40) dimostra che **il Teorema dell'energia cinetica è valido anche per una spezzata**.
Posso dunque enunciare il:

Teorema dell'energia cinetica per una spezzata

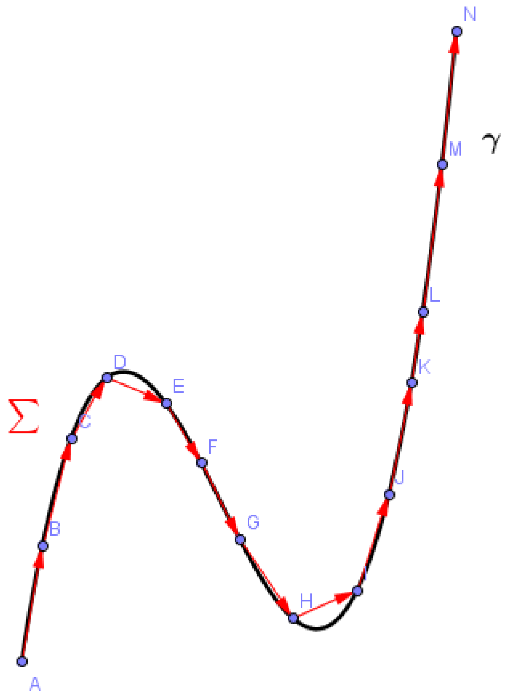
Siano $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ tutte le n forze applicate al corpo K e siano tali forze costanti.
Il lavoro della risultante $\vec{R}$ lungo la spezzata Σ eguaglia la variazione di energia cinetica del corpo K.
In formule: $L_\Sigma(\vec{R}) = \Delta E_C$.

17. Il lavoro di una forza costante lungo una curva qualunque

Voglio adesso definire il lavoro di una forza costante **lungo una qualsiasi curva γ**.



L'idea è semplice: approssimo **la curva con una spezzata** che ha un numero enormi di lati e i cui vertici stanno sulla curva.



All'aumentare del numero dei lati (o dei vertici), la spezzata ricopre (quasi) interamente la curva. Pertanto, sembra opportuno porre:

$$L_\gamma(\vec{F}) \cong L_\Sigma(\vec{F}) \qquad (41)$$

Ma il Teorema della spezzata afferma che il lavoro di una qualunque spezzata che ha come estremi gli estremi A e N della curva γ **ha sempre lo stesso valore**, dato dalla (38).

Per definizione, pongo dunque:

$$L_\gamma(\vec{F}) = F_x \cdot \Delta x + F_y \cdot \Delta y \qquad (42)$$

18. Il Teorema dell'energia cinetica per una curva

L'aspetto interessante dal punto di vista fisico è che il Teorema dell'energia cinetica, per ovvi motivi[19], **si estende anche ad una qualunque curva**.

Lo enuncio:

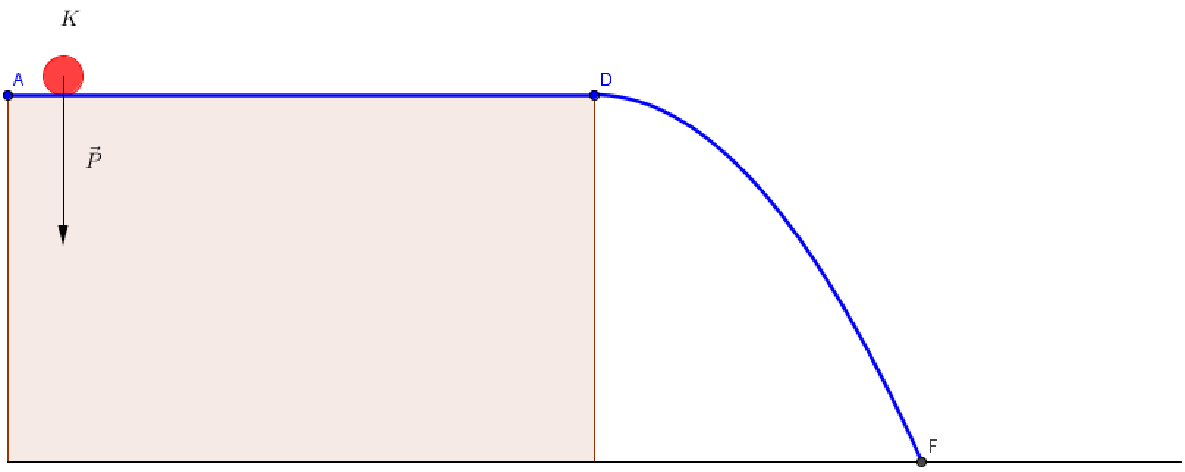
Teorema dell'energia cinetica per una curva

Siano $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ tutte le n forze applicate al corpo K e siano tali forze costanti.
Il lavoro della risultante $\vec{R}$ lungo la curva γ eguaglia la variazione di energia cinetica del corpo K.
In formule: $L_\gamma(\vec{R}) = \Delta E_C$.

19. Un esempio di applicazione del Teorema dell'energia cinetica per una curva

Nella situazione fisica rappresentata in figura:

[19] quali?



il corpo K, che si trova ad un'altezza h dal suolo ed è appoggiato su un piano, possiede nel punto A la velocità $\overrightarrow{v_A}$ diretta orizzontalmente da A a D. Giunto in D, cade verso il basso percorrendo, com'è noto, una traiettoria parabolica, fino a giungere a terra nel punto F.

Calcolo il modulo v della velocità con cui K atterra in F, supponendo che sul corpo non agisca alcuna forma di attrito.

A tale proposito, considero la curva γ formata dal tratto AD e dall'arco di parabola DF.

Il lavoro della forza peso $\vec{P}$ lungo la curva γ , che è l'unica forza agente sul corpo, vale[20]:

$$L_\gamma(\vec{P}) = P_x \cdot \Delta x + P_y \cdot \Delta y = 0 \cdot x_F - mg \cdot (-h) = mgh$$

Applico il Teorema dell'energia cinetica per una curva:

$$L_\gamma(\vec{R}) = \Delta E_C$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \qquad (43)$$

Dalla (43) è adesso semplice, con qualche passaggio algebrico, ricavare la velocità v.

[20] Ho applicato la (42).

20. Forze conservative

Una forza $\overrightarrow{F}$ si dice **conservativa** se il lavoro della forza $\overrightarrow{F}$ lungo una spezzata $\Sigma(A, B)$ **dipende unicamente dagli estremi della spezzata $\boldsymbol{\Sigma}$**.

Il Teorema della spezzata afferma allora che **ogni forza costante è conservativa**.

Per trovare una forza **non conservativa** bisogna, dunque, ricorrere ad una **forza non costante**. Ma, com'è ovvio, sarebbe necessario dapprima definire il **lavoro di una forza costante lungo uno spostamento**[21].

Tale definizione comporta, però, concetti matematici avanzati, quali quello di integrale, e dunque, in queste pagine non verrà introdotta. Tuttavia, si deve tenere ben presente che **esistono forze non costanti conservative e forze non costanti non conservative.**

Tra le forze non costanti conservative cito la **forza elastica**; tra quelle non costanti non conservative la **forza di attrito**.

21. L'importanza delle forze conservative

L'importanza di una **forza conservativa $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}$** risiede nel fatto che per essa **esiste una funzione $\boldsymbol{U}$**, che consente di calcolare **con estrema semplicità** il lavoro di $\overrightarrow{F}$ lungo una qualsiasi curva γ.

La funzione U ha come dominio[22] $\mathbb{R}^2$, cioè l'insieme dei punti del piano, e come insieme di arrivo $\mathbb{R}$. Ciò significa che **$\boldsymbol{U}$ associa ad ogni punto del piano uno ed un solo numero reale**.

Il **lavoro dell forza $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}$ lungo la curva $\boldsymbol{\gamma(A, B)}$** si calcola allora con la formula seguente:

$$L_\gamma(\overrightarrow{F}) = U(A) - U(B) \qquad (44)$$

La funzione U prende il nome di **energia potenziale** associata[23] alla forza conservativa $\overrightarrow{F}$.

---

[21] Ed in seguito, lungo una spezzata ed una curva.

[22] Per definizione, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y),\ x\epsilon\mathbb{R} \wedge y\epsilon\mathbb{R}\}$

[23] Attenzione: **ogni forza conservativa ha la sua personale funzione energia potenziale**.

22. Considerazioni sulla funzione energia potenziale

Nel paragrafo precedente **ho postulato l'esistenza di una funzione energia potenziale** associata ad una forza conservativa, senza aggiungere altro.

L'esistenza della funzione U è ovviamente dimostrabile matematicamente, ma questa è una fatica che esula dal contenuto di questa dispensa.

Dunque, U esiste. **Ma com'è fatta questa funzione $\boldsymbol{U}$**?

Inizio con l'osservare che la formula (44) dice che nel computo del lavoro della forza $\vec{F}$ lungo la curva γ è necessario calcolare la quantità:

$$U(A) - U(B) \qquad (45)$$

Riscrivo la quantità (45) nel modo che segue:

$$U(A) - U(B) = -[U(B) - U(A)] \qquad (46)$$

e noto che

$$U(A) - U(B) = -\Delta U \qquad (47)$$

Pertanto, $U(A) - U(B)$ **é l'opposto della variazione dell'energia potenziale**[24].

La (44) può così essere riscritta nel modo seguente:

$$L_\gamma(\vec{F}) = -\Delta U \qquad (48)$$

Se il mio obbiettivo è, dunque, quello di calcolare il lavoro della forza $\vec{F}$ lungo la curva γ, ecco che quello che mi interessa **non è tanto il valore che la funzione $\boldsymbol{U}$ assume in un punto ben preciso bensì la differenza dei valori che $\boldsymbol{U}$ assume nel punto iniziale e finale della curva $\boldsymbol{\gamma}$.**

Tenendo ben presente quest'ultima osservazione, per determinare **l'espressione matematica della funzione $\boldsymbol{U}$** procedo nel modo seguente**:** **scelgo arbitrariamente** un **punto qualunque** P del piano e pongo $\boldsymbol{U(P) = 0}$**.**

[24] L'opposto perché è l'energia potenziale iniziale meno l'energia potenziale finale e non viceversa.

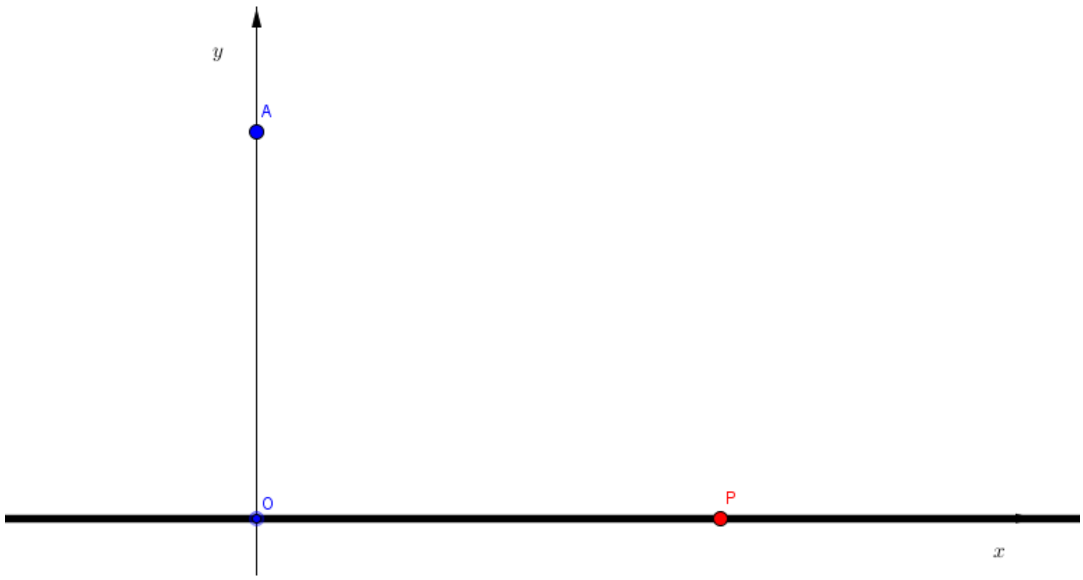
In pratica sto, lo ribadisco, **arbitrariamente** scegliendo P come punto in cui **l'energia potenziale vale zero**: sto cioè fissando lo **zero dell'energia potenziale**.

Questa scelta, come vedremo nel prossimo paragrafo, mi metterà nelle condizioni di ricavare agevolmente **l'espressione matematica della funzione $\boldsymbol{U}$**.

23. L'energia potenziale gravitazionale

Sviluppo un esempio che dia concretezza alle considerazioni che ho sviluppato nel §22.

Con riferimento alla figura:



considero la forza peso $\vec{P}$ e indico con $\boldsymbol{U}$ la sua energia potenziale.

Scelgo un punto P a caso **sul suolo**, che suppongo coincidente con l'asse x, e pongo arbitrariamente $\boldsymbol{U(P) = 0}$.

Voglio calcolare il valore che la funzione U assume nel punto A, cioè il valore $\boldsymbol{U(A)}$.

A tale proposito, applico la (44):

$$L_{\gamma(A,P)}(\vec{F}) = U(A) - U(P) \qquad (49)$$

Poiché $U(P) = 0$, la (49) diventa:

$$L_{\gamma(A,P)}(\vec{F}) = U(A) \qquad (50)$$

La (50) dice chiaramente che il **valore che la funzione *U* assume nel punto *A* eguaglia** $\boldsymbol{L_{\gamma(A,P)}(\vec{F})}$.

Si tratta dunque di calcolare tale termine.

Utilizzando il Teorema della spezzata, ottengo $L_{\gamma}(\vec{F}) = mgh$, dove h è ordinata del punto A.

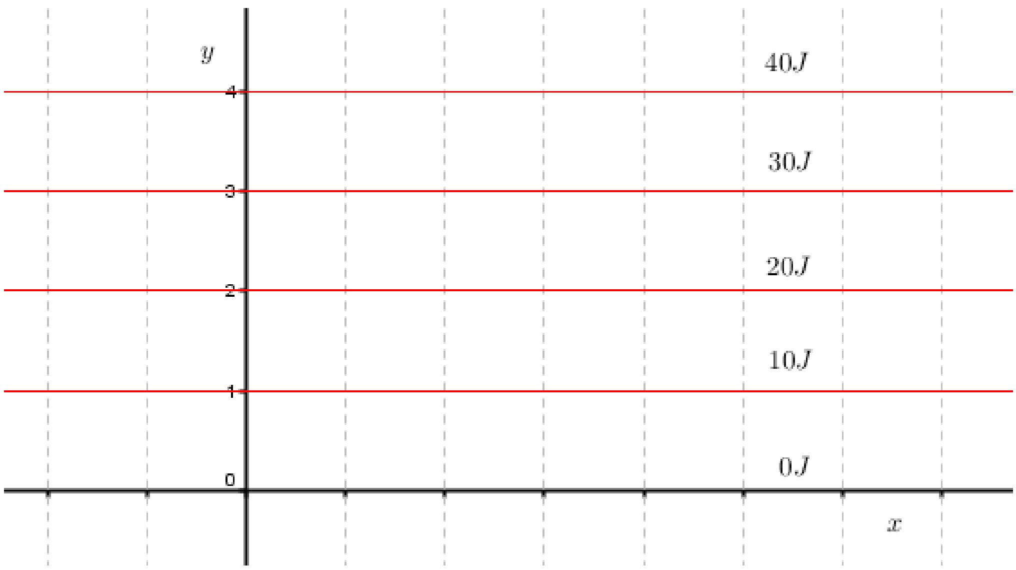
Pertanto, giungo al risultato:

$$U(A) = mgh \qquad (51)$$

L'energia potenziale associata alla forza peso, che prende il nome di **energia potenziale gravitazionale**, dipende così dalla **massa** del corpo, dall'**accelerazione di gravità** (del luogo in cui ci si trova) e, infine, dall'**altezza** rispetto al suolo.

Tutti i punti, dunque, che **si trovano alla stessa altezza rispetto al suolo** possiedono così la stessa energia potenziale.

Ad esempio, **un corpo di massa** $\boldsymbol{m = 1}$ **kg**, che si trova in un posto la cui l'**accelerazione di gravità è di 10** $\mathbf{\frac{m}{s^2}}$ ha un'energia potenziale che è indicata nella mappa che segue:

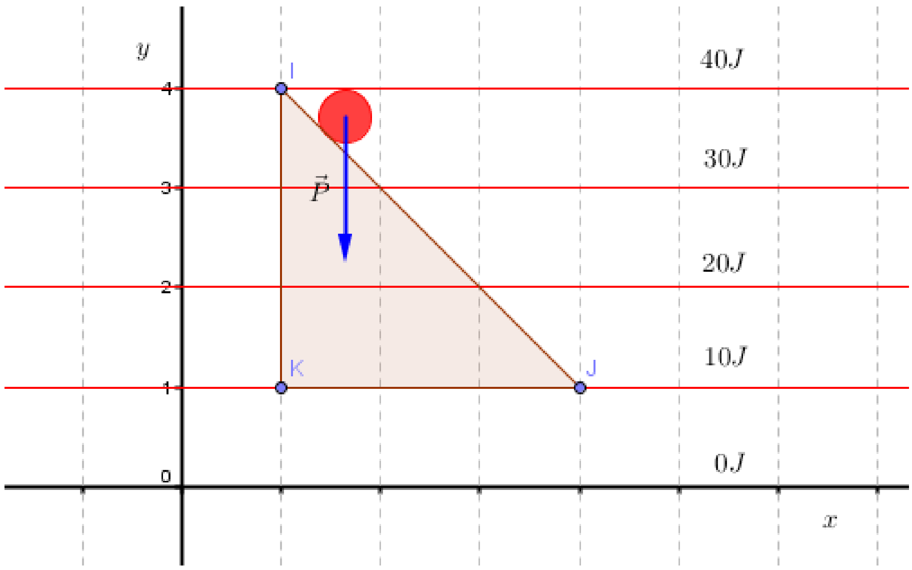


Nella mappa, la lunghezza di un quadretto vale 1 m.

Pertanto, tutti i punti che si trovano sulla retta $y = 1$ **hanno energia potenziale $\mathbf{10\ J}$**; tutti i punti che si trovano sulla retta retta $y = 2$ **hanno energia potenziale $\mathbf{20\ J}$**; e così via.

La **mappa dell'energia potenziale (gravitazionale)** rende il calcolo del lavoro della forza peso decisamente semplice.

Si voglia ad esempio calcolare il lavoro della forza peso $\vec{P}$ lungo la discesa $\overrightarrow{IJ}$ del piano inclinato in figura:



La (44) porge:

$$L_{\overrightarrow{IJ}}(\vec{P}) = U(I) - U(J) = 40\ \mathrm{J} - 10\ \mathrm{J} = 30\ \mathrm{J}$$

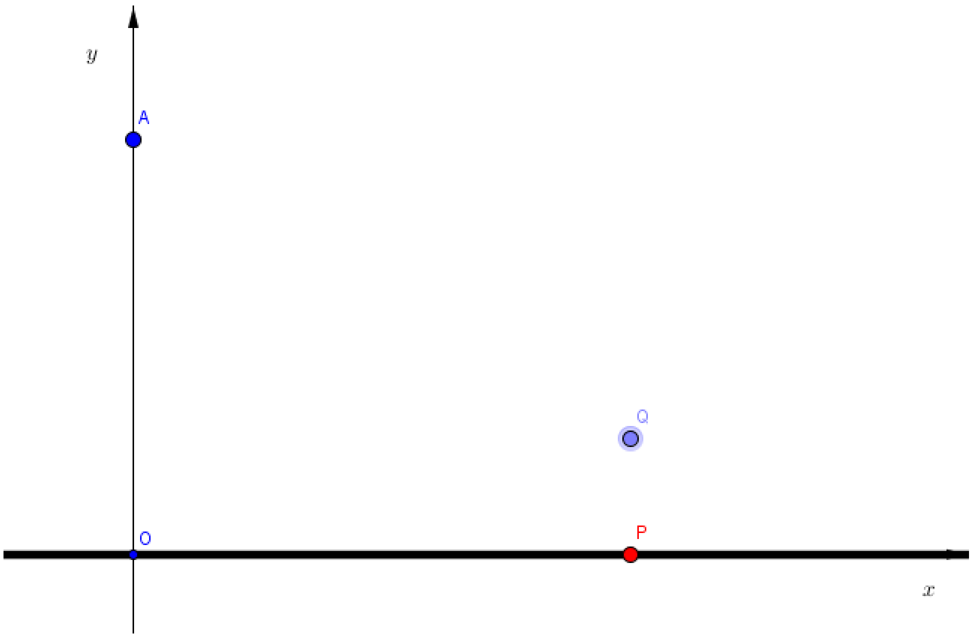
Semplicissimo!

24. E se cambiassi il punto ad energia potenziale nulla?

Nell'esempio trattato nel §23 può venire il dubbio che **fissando un altro punto**, diverso da P, in cui l'energia potenziale gravitazionale assume il valore 0, **possa cambiare il valore del lavoro della forza peso calcolata lungo una curva qualunque**.

Provo che non è così.

Fisso, dunque, un **nuovo punto**, il punto Q della figura che segue, **come punto ad energia potenziale nulla: pertanto**, $U(Q) = 0$. Suppongo che $Q = (x_P, 1)$.



Voglio calcolare il valore che la funzione U assume nel punto A, cioè il valore $U(A)$.

A tale proposito, applico la (44):

$$L_{\gamma(A,Q)}(\vec{F}) = U(A) - U(Q) \qquad (52)$$

Poiché $U(Q) = 0$, la (52) diventa:

$$L_{\gamma(A,Q)}(\vec{F}) = U(A) \qquad (53)$$

La (50) dice chiaramente che il valore che la funzione U assume nel punto A eguaglia $L_{\gamma(A,P)}(\vec{F})$. Si tratta dunque di calcolare tale termine.

Utilizzando il Teorema della spezzata, ottengo

$$L_{\gamma}(\vec{F}) = -mg \cdot (1 - h) = mgh - mg \qquad (54),$$

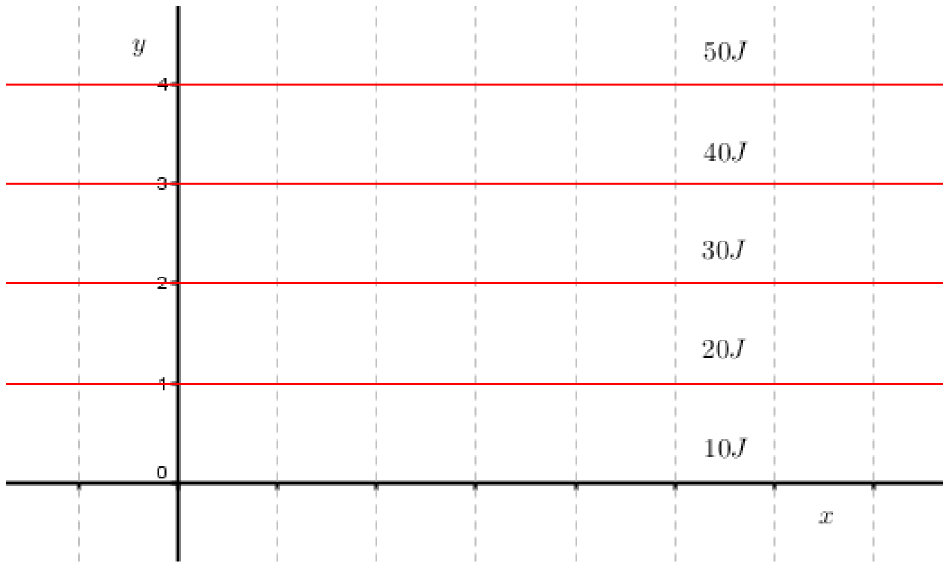
dove h è ordinata del punto A.

Pertanto, giungo al risultato:

$$U(A) = mgh - mg \qquad (55)$$

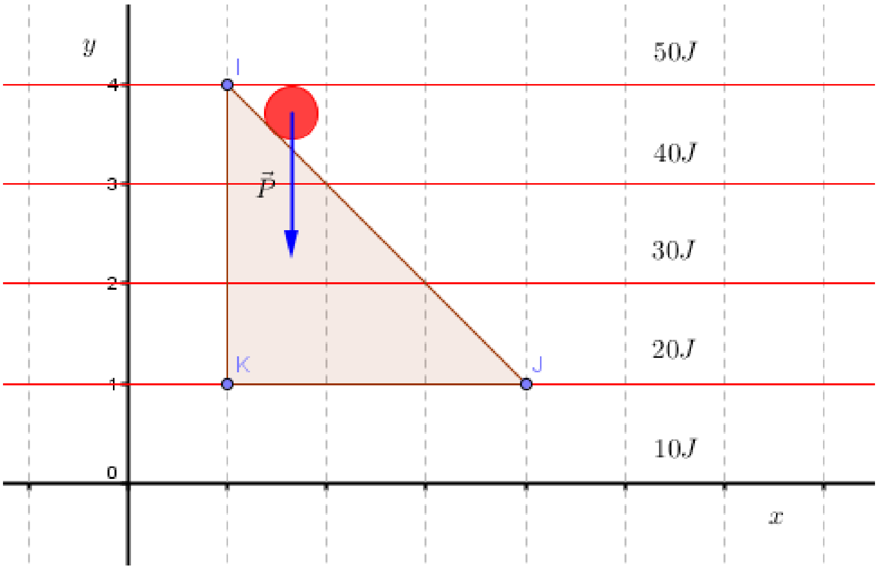
L'espressione dell'energia potenziale associata alla forza peso **è diversa dalla (51)**!
Essa differisce per la costante $-mg$ **.**

In questo caso, **un corpo di massa** $m = 1$ **kg**, che si trova in un posto la cui **accelerazione di gravità è di 10** $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, *lo stesso corpo dunque del §23*, ha l'energia potenziale che è indicata nella mappa che segue:



Anche i valori dell'energia potenziale cambiano!

Provo, però, a calcolare il lavoro della forza peso $\vec{P}$ lungo la discesa $\overrightarrow{IJ}$ del piano inclinato in figura:



La (44) porge:

$$L_{\overrightarrow{IJ}}(\vec{P}) = U(I) - U(J) = 50\ \mathrm{J} - 20\ \mathrm{J} = 30\ \mathrm{J}$$

Il risultato non cambia.

Morale: **l'espressione dell'energia potenziale gravitazionale cambia** e, si può dimostrare, che ogni funzione energia potenziale che si ottiene **differisce dall'altra per una costante**.

Il calcolo del lavoro della forza peso lungo una qualunque curva, però, **fornisce lo stesso valore**, poiché tale calcolo – si veda la (44) – coinvolge unicamente **le differenze di energia potenziale**.

25. L'energia potenziale associata ad una forza costante

Con la tecnica utilizzata nei precedenti paragrafi, prova a dimostrare che **l'energia potenziale associata alla forza costante $\vec{F} = F_x\,\vec{\imath} + F_y\,\vec{\jmath}$** è la funzione:

$$U(x,y) = -F_x \cdot x - F_y \cdot y \qquad (56)$$

26. Il Teorema di conservazione dell'energia meccanica

Suppongo che su un corpo K agisca **la sola forza costante $\vec{F}$**.

Allora il Teorema dell'energia cinetica afferma che il lavoro della forza $\vec{F}$ lungo la curva $\gamma(A,B)$ si può calcolare **utilizzando la formula**

$$L_\gamma(\vec{R}) = \Delta E_C$$

Tale lavoro si può però anche calcolare utilizzando la formula (48)

$$L_\gamma(\vec{F}) = -\Delta U$$

Pertanto si ha:

$$\Delta E_C = -\Delta U \qquad (57)$$

Esplicito la formula (57):

$$E_C(B) - E_C(A) = U(A) - U(B) \qquad (58)$$

e riscrivo la (58) nel modo seguente:

$$E_C(B) + U(B) = E_C(A) + U(A) \qquad (59)$$

La (59) afferma una cosa interessante: nel caso in cui agisca la sola forza costante $\vec{F}$ **la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale nel punto iniziale $\boldsymbol{A}$ è uguale alla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale nel punto finale $\boldsymbol{B}$**.

In altri termini, la somma dell'energia cinetica iniziale e finale del corpo K **resta costante** lungo la curva $\gamma(A,B)$.

Do un nome a tale somma e la chiamo **energia meccanica $\boldsymbol{E_m}$** del corpo K.

Pertanto:

$$E_m = E_c + U \qquad (60)$$

Il risultato appena dimostrato si può estendere al seguente enunciato:

Teorema di conservazione dell'energia meccanica

Siano $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ tutte le n forze applicate al corpo K e siano tali forze **conservative**. Durante il moto, l'energia meccanica del corpo K resta costante.

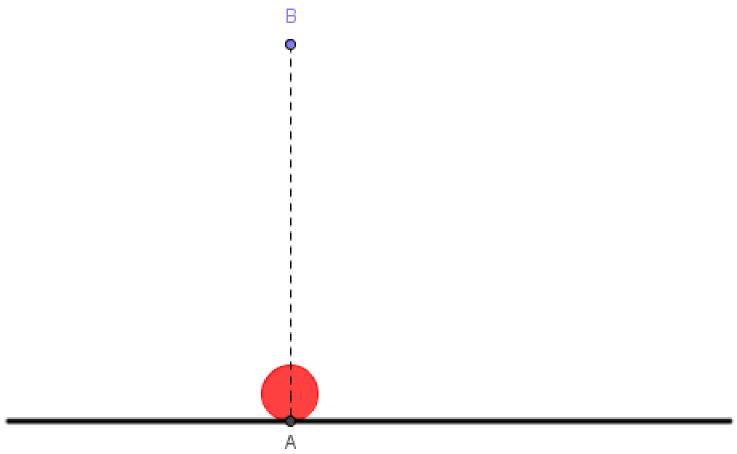
27. Esempi di applicazione del Teorema di conservazione dell'energia meccanica

Esempio 1

Il corpo K viene lanciato verso l'alto con velocità $\vec{v}$. Nel caso in cui non vi sia la resistenza dell'aria, **calcolo la massima altezza h raggiunta dal corpo**.

L'unica forza agente su K è la forza peso $\vec{P}$.

Con riferimento alla figura seguente, se B è il punto in cui il corpo annulla la sua velocità, si tratta di calcolare $h = \overline{AB}$.



Calcolo l'energia meccanica[25] nel punto A:

$$E_m(A) = E_C(A) + U(A) = \frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2$$

e l'energia meccanica nel punto B:

$$E_m(B) = E_C(B) + U(B) = 0 + mgh = mgh$$

[25] Ho assunto come livello zero dell'energia potenziale il livello del suolo.

Poiché $E_m(A) = E_m(B)$, si ha:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2,$$

da cui ricavo

$$h = \frac{v^2}{2g} \qquad (61)$$

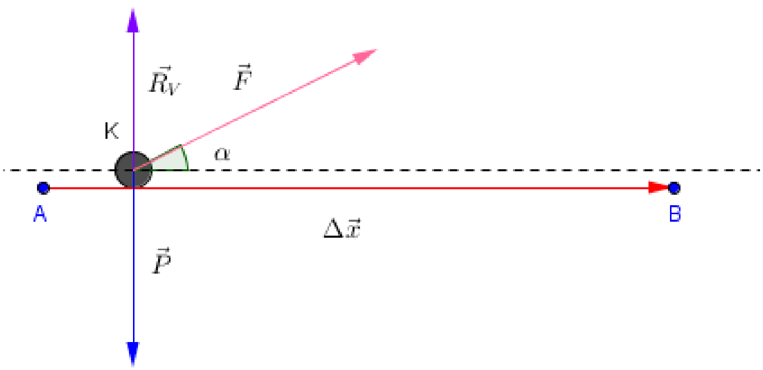
<u>Esempio 2</u>

Un corpo K, appoggiato su un piano, effettua lo spostamento $\overrightarrow{\Delta x}$ e lungo tale spostamento agiscono le tre forze costanti $\vec{F}$, $\vec{P}$ (la forza peso) e $\overrightarrow{R_V}$ (la reazione vincolare).

Nel punto A il corpo ha velocità nulla. Voglio **calcolare la velocità che il corpo possiede in B**.

Introduco un sistema cartesiano con origine in A e asse delle ascisse coincidente con AB.

Le tre forze sono **conservative**: indico con $U_{\vec{P}}$, $U_{\vec{F}}$ e $U_{\overrightarrow{R_V}}$ le **tre funzioni energia potenziale** associate alle tre forze in questione.



Calcolo l'energia meccanica nei punti A e B:

$$E_m(A) = E_C(A) + U(A) = U_{\vec{P}}(A) + U_{\overrightarrow{R_V}}(A) + U_{\vec{F}}(A)$$

$$E_m(B) = E_C(B) + U(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + U_{\vec{P}}(B) + U_{\overrightarrow{R_V}}(B) + U_{\vec{F}}(B)$$

Per il Teorema di conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + U_{\vec{P}}(B) + U_{\overrightarrow{R_V}}(B) + U_{\vec{F}}(B) = U_{\vec{P}}(A) + U_{\overrightarrow{R_V}}(A) + U_{\vec{F}}(A) \qquad (62)$$

Ora osservo che:

$$U_{\vec{P}}(A) - U_{\vec{P}}(B) = L_{\overrightarrow{AB}}(\vec{P}) = 0 \qquad (63)$$

L'ultima uguaglianza dipende dal fatto che $\vec{P}$ e $\overrightarrow{AB}$ sono perpendicolari.

La (63) porge dunque:

$$U_{\vec{P}}(A) = U_{\vec{P}}(B) \qquad (64)$$

Analogamente:

$$U_{\overrightarrow{R_V}}(A) = U_{\overrightarrow{R_V}}(B) \qquad (65)$$

La (64) e la (65) riducono la (62) alla forma:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + U_{\vec{F}}(B) = U_{\vec{F}}(A) \qquad (66)$$

L'espressione dell'energia potenziale della forza $\vec{F}$ è[26]:

$$U_{\vec{F}}(x, y) = -F_x \cdot x - F_y \cdot y$$

Pertanto, $U_{\vec{F}}(A) = 0$ e $U_{\vec{F}}(B) = U_{\vec{F}}(x_B, 0) = -F_x \cdot x_B = -F \cdot cos(\alpha) \cdot x_B$.

La (66) diventa così:

$$-F \cdot cos(\alpha) \cdot x_B + \frac{1}{2}mv_B^2 = 0 \qquad (67)$$

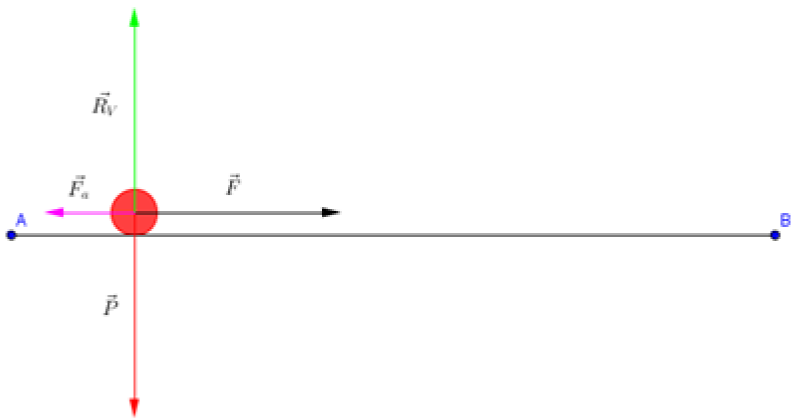
Dalla (67) ricavo:

$$v_B = \sqrt{\frac{2F\ cos(\alpha)\overline{AB}}{m}} \qquad (68)$$

28. L'energia meccanica si conserva se agiscono anche forze non conservative?

Considero la situazione fisica in figura in cui sul corpo K agiscono le tre forze costanti $\vec{F}$, $\vec{P}$ (la forza peso) e $\overrightarrow{R_V}$ (la reazione vincolare) e la forza di attrito $\overrightarrow{F_a}$.

[26] Vedi la (56).



In questo caso, lungo lo spostamento $\overrightarrow{AB}$ agiscono **tre forze conservative** e **la forza non conservativa** $\overrightarrow{F_a}$.

Calcolo il **lavoro della risultante $\vec{R}$** di questo insieme di forze lungo il tratto $\overrightarrow{AB}$:

$$L_{\overrightarrow{AB}}\left(\vec{R}\right) = L_{\overrightarrow{AB}}\left(\vec{P}\right) + L_{\overrightarrow{AB}}\left(\overrightarrow{R_V}\right) + L_{\overrightarrow{AB}}\left(\vec{F}\right) + L_{\overrightarrow{AB}}\left(\overrightarrow{F_a}\right) \qquad (69)$$

Nella (69) gli addendi $L_{\overrightarrow{AB}}\left(\vec{P}\right)$ e $L_{\overrightarrow{AB}}\left(\overrightarrow{R_V}\right)$ sono nulli.

Inoltre, la conservatività del peso fornisce l'uguaglianza:

$$L_{\overrightarrow{AB}}\left(\vec{P}\right) = U_{\vec{P}}(A) - U_{\vec{P}}(B) \qquad (70)$$

Per il teorma dell'energia cinetica:

$$L_{\overrightarrow{AB}}\left(\vec{R}\right) = \Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) \qquad (71)$$

La (69) diventa così:

$$E_C(B) - E_C(A) = U_{\vec{P}}(A) - U_{\vec{P}}(B) + L_{\overrightarrow{AB}}\left(\overrightarrow{F_a}\right) \qquad (72)$$

Il lavoro della forza di attrito lungo lo spostamento $\overrightarrow{AB}$ vale:

$$L_{\overrightarrow{AB}}\left(\overrightarrow{F_a}\right) = -F_a \cdot \overline{AB} \qquad (73)$$

Inserisco la (73) nella (72) e ottengo:

$$E_C(B) - E_C(A) = U_{\vec{P}}(A) - U_{\vec{P}}(B) - F_a \cdot \overline{AB} \qquad (74)$$

Riordino infine i termini della (74) e ho:

$$E_C(B) + U_{\vec{P}}(B) = E_C(A) + U_{\vec{P}}(A) - F_a \cdot \overline{AB} \qquad (75)$$

Pertanto:

$$E_m(B) = E_m(A) - F_a \cdot \overline{AB} \qquad (76)$$

La (76) dice chiaramente che l'energia meccanica, in questo particolare caso, **non si conserva e diminuisce.**

Questo risultato è sempre valido in presenza di forze non conservative.

Nel caso trattato, **parte dell'energia meccanica, a causa dell'azione della forza di attrito, si trasforma in calore**.