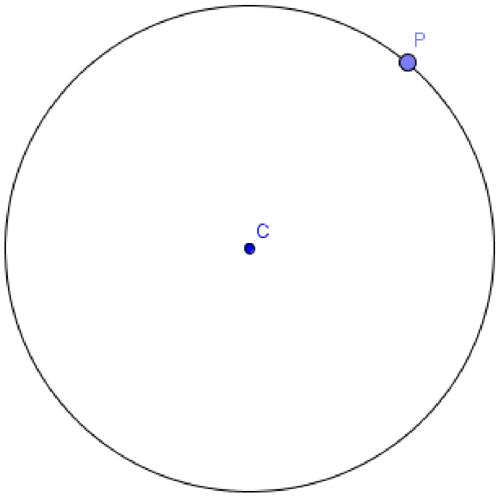
Il moto circolare uniforme

1. Definizione di moto circolare uniforme

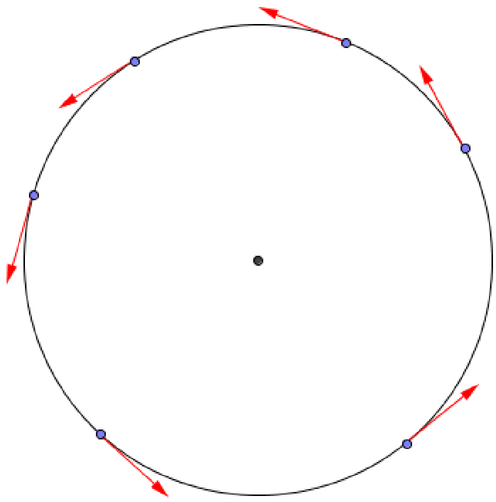
Un punto P si muove di moto **circolare uniforme**[1] se percorre una **circonferenza** con **velocità scalare costante**.



Pertanto, **il modulo della velocità è costante**.

Invece, in tale moto, **il vettore velocità non si mantiene costante**: esso, infatti, **cambia continuamente direzione**, com'è possibile osservare nella figura seguente, nella quale ho tracciato il vettore velocità[2] in alcuni istanti del moto:

[1] D'ora in poi *moto circolare uniforme* verrà abbreviato in **MCU**.
[2] Ricorda che il vettore velocità in un punto ha direzione tangente alla traiettoria in quel punto.



D'ora in poi, supporrò che il corpo percorra la traiettoria in senso **antiorario**[3].

2. Lo studio del moto circolare uniforme

Queste pagine sono dedicate allo **studio** del moto circolare uniforme.

Studiare tale moto[4] significa stabilire:

1. la **traiettoria** del punto in movimento
2. la sua **posizione** in ogni istante
3. la sua **velocità** in funzione del tempo
4. la sua **accelerazione** in funzione del tempo
5. la **forza** agente sul corpo[5]

Farò riferimento ai punti 1. ÷ 5. come al **protocollo** del moto.

[3] La scelta è puramente convenzionale.
[4] e, in generale, un qualunque moto…
[5] E dunque la forza responsabile del movimento.

Mi pare opportuno mettere in evidenza che quando si parla di **velocità**, **accelerazione** e **forza** si fa riferimento alla loro **natura vettoriale**: la 3., 4. e 5. richiedono dunque che siano note la **direzione**, il **verso** ed il **modulo** di tali grandezze in ogni istante del moto.

Lo studio del moto circolare uniforme è di particolare **interesse** per due motivi:

a) è il primo esempio di moto che incontriamo la cui **traiettoria non è rettilinea**;
b) in tale moto emerge con chiarezza **la natura vettoriale** di grandezze fisiche quali la velocità e l'accelerazione; natura che, nello studio del moto rettilineo, uniforme e uniformemente accelerato, rimane nascosta a causa della **forma della traiettoria**.

3. La traiettoria del moto circolare uniforme

Sul **punto 1.** del protocollo del moto è stato detto tutto: la traiettoria del moto è una **circonferenza**, così come si desume dalla definizione del moto stesso[6].

4. Il periodo e la frequenza di un moto circolare uniforme

Il **periodo** di un moto circolare uniforme è il tempo impiegato dal punto P per percorrere l'intera circonferenza.
Esso si indica con la lettera T e la sua unità di misura è il secondo.

La **frequenza** di un moto circolare uniforme è il numero di giri percorsi dal punto in un secondo.

Essa si indica con la lettera f e la sua unità di misura è l'**hertz** (simbolo: Hz).

La frequenza f ed il periodo T sono legati dalla relazione

[6] Vedi §1.

$$f = \frac{1}{T}. \qquad (1)$$

La (1) esprime la frequenza in funzione del periodo: essa ci dice che f e T sono due grandezze inversamente proporzionali.

Ad esempio, se $T = 0,25\ \text{s}$ allora $f = 4\ \text{Hz}$: sono 4, infatti, i giri effettuati dal corpo in 1 secondo.

5. La relazione che collega il modulo della velocità ed il periodo in un moto circolare uniforme

In un periodo T il punto percorre l'intera circonferenza, dunque $2\pi r$ metri, dove r indica il raggio della traiettoria.

Pertanto, il modulo v della velocità è[7]:

$$v = \frac{2\pi r}{T}. \qquad (2)$$

La (2) esprime il modulo della velocità in funzione del periodo: essa ci dice che v e T sono due grandezze inversamente proporzionali.

Ad esempio, se $T = 0,2\ \text{s}$ e $r = 0,5\ \text{m}$ allora $v = 15,70\ \text{m/s}$.

6. La relazione che collega il modulo della velocità e la frequenza in un moto circolare uniforme

Sostituendo la (1) nella (2), ottengo:

$$v = 2\pi r f. \qquad (3)$$

[7] Il modulo della velocità è costante e, dunque, per calcolarlo possiamo fare riferimento ad un intervallo di tempo **a piacere**.

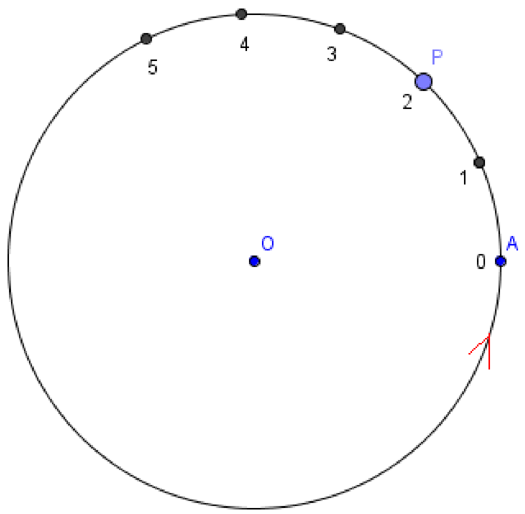
La (2) esprime il modulo della velocità in funzione della frequenza: essa ci dice che v e f sono due grandezze direttamente proporzionali.

Ad esempio, se $f = 3$ Hz e $r = 0,5$ m allora $v = 9,42$ m/s.

7. Un sistema di riferimento per il punto in movimento

Per **fissare univocamente la posizione** del punto P lungo la traiettoria durante il suo moto, si può procedere in diversi modi.

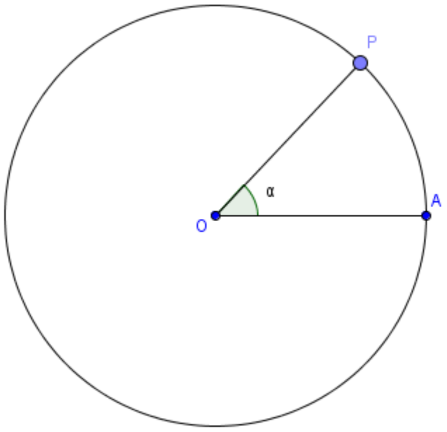
Il più naturale consiste nell'introdurre **un sistema di ascisse curvilinee** sulla circonferenza: a tale proposito, si fissa un punto come **origine** del sistema, ad esempio il punto A in figura, una **unità di misura** a piacere, ed infine si **orienta** la traiettoria, ad esempio in senso antiorario[8]:



Nel sistema di riferimento fissato in figura, il punto P ha **ascissa curvilinea** 2: in questo caso, scrivo $P = (2)$.

[8] Non abbiamo disegnato in figura tutte le ascisse curvilinee.

In alternativa, si può fissare la posizione del punto P utilizzando l'**angolo** $P\hat{O}A$: la conoscenza della misura[9] di tale angolo, indichiamola con α, consente di sapere con precisione dove si trova il punto in movimento.



α è dunque una sorta di **ascissa angolare** e, in tal caso, scrivo $P=(\alpha)$.

Nel caso in figura, ad esempio, si ha $P=\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

8. La legge oraria del moto circolare uniforme (parte prima)

Affronto **il punto 2.** del protocollo.

Comincio col dire che stabilire la **legge oraria** del moto circolare uniforme significa dire **come varia l'ascissa**, curvilinea o angolare, del punto P in movimento **in funzione del tempo**.

In altri termini, la legge oraria è una **relazione matematica** che fornisce **la posizione di P in ogni istante.**

[9] E' preferibile esprimere la misura dell'angolo in **radianti**.

Suppongo di iniziare ad analizzare il moto del punto P, che si sta muovendo con moto circolare uniforme, quando esso transita dal punto A, che dunque è il mio punto di partenza, e di individuare la posizione di P attraverso un'**ascissa curvilinea**.

Il corpo si muove con velocità costante v e, dunque, in t secondi percorre $v \cdot t$ metri.

Se il tempo trascorso è inferiore al periodo T del moto, e dunque **il corpo non ha ancora percorso un'intera circonferenza**, è facile rendersi conto che l'ascissa x del punto è semplicemente[10]

$$x = v \cdot t \qquad (4).$$

Se però sono passati più di T secondi, ecco che il punto P **è ripassato almeno una volta per il punto iniziale** A e dunque dopo $2\pi r$ metri, che è la misura della lunghezza della circonferenza, la sua ascissa **si azzera** e la (4) **non è più adatta** ad individuare la posizione del punto.

In altri termini, la (4) funziona perfettamente per un moto uniforme che si sviluppa su una traiettoria rettilinea o curvilinea aperta, non intrecciata: viene però meno su **traiettorie chiuse**, che devono essere ripetute **periodicamente**.

La **legge oraria del MCU** si ottiene allora modificando leggermente la (4):

$$x = v \cdot t - n \cdot 2\pi r \qquad (5)$$

nella quale n è il numero di giri completi percorsi dal corpo[11].

Utilizzo la notazione funzionale per esprimere **la dipendenza della variabile x dalla variabile t**:

$$x(t) = v \cdot t - n \cdot 2\pi r \qquad (6)$$

Sviluppo un esempio.

---

[10] La (4), come sappiamo, è **la legge oraria del moto uniforme**.
[11] La spiegazione della (5) appare immediata.

La legge oraria del moto di un corpo che percorre una circonferenza di raggio $r = 2$ m con velocità di modulo costante pari a $v = 3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ è, in accordo con la (6),:

$$x(t) = 3t - n \cdot 4\pi \qquad (7)$$

Calcolo l'ascissa del corpo dopo 20 s.

Il periodo di tale moto vale $T = \frac{2\pi r}{v} = 4{,}19$ s e dunque, in 20 s il corpo avrà percorso 4 giri completi.

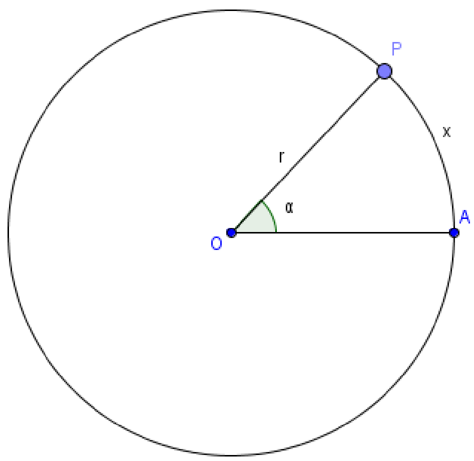
Pertanto, $n = 4$ e $x(20) = 3 \cdot 20 - 4 \cdot 4\pi = 9{,}76$ m.

12. La legge oraria del moto circolare uniforme (parte seconda)

Studio **come varia,** invece, **l'ascissa angolare** α del punto in movimento P in funzione del tempo.

Se con x indico l'ascissa curvilinea del punto, ricordando che α è la misura in radianti dell'angolo $P\hat{O}A$, ho[12]:

$$\alpha = \frac{x}{r} \qquad (8).$$



[12] La (8) è proprio la definizione di misura in radianti dell'angolo $P\hat{O}A$.

Inserendo la (6) nella (8), ottengo:

$$\alpha(t) = \frac{v \cdot t - n \cdot 2\pi r}{r} \qquad (9).$$

In particolare, se l'istante considerato t è minore del periodo T del moto, cioè se l'angolo α è minore di 2π, la (9) diventa:

$$\alpha(t) = \frac{v}{r} \cdot t \qquad (10).$$

Ad esempio, se $v = 2$ m/s e $r = 1$ m, il periodo del moto vale $T = \frac{2\pi r}{v} = \pi$ s e nell'intervallo temporale $[0, \pi)$ la legge oraria (10) diventa:

$$\alpha(t) = 2t \qquad (11).$$

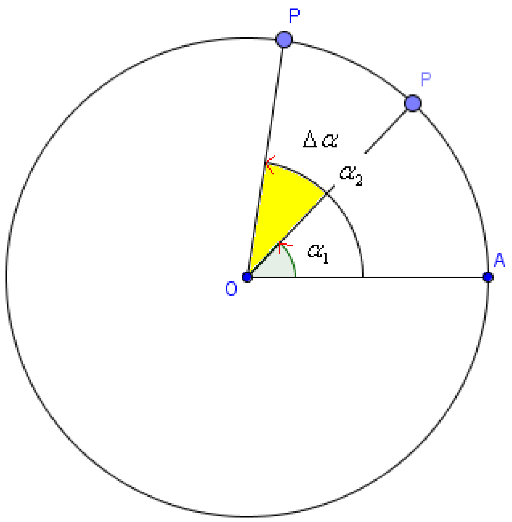
Di nuovo a titolo d'esempio, il corpo nell'istante $t = 1$ s ha ascissa angolare $\alpha(1) = 2$: la quale, tradotta in gradi, significa $\alpha(1) \cong 115°$.

13. La velocità angolare

Suppongo che il corpo in movimento, trascorsi Δt secondi, passi dalla posizione individuata dall'ascissa angolare α_1 alla posizione individuata dall'ascissa angolare α_2.

Dico allora che il punto ha percorso una **distanza angolare** di $\Delta\alpha$ radianti[13].

[13] $\Delta\alpha$ è l'angolo colorato in giallo nella figura che segue.



Per misurare la variazione dell'angolo $\Delta\alpha$ percorso dal corpo in un certo intervallo di tempo Δt, introduco la grandezza fisica **velocità angolare**, il cui simbolo è ω, definita dal rapporto:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \qquad (12).$$

L'unità di misura della velocità angolare è rad/s, cioè il **radiante al secondo**.

Asserire, ad esempio, che la velocità angolare di un corpo in movimento è di $\omega = 2$ rad/s significa dire che ogni secondo il punto percorre una distanza angolare di 2 radianti.

14. Una nuova definizione del moto circolare uniforme

Va da sé che, se il punto si muove lungo la circonferenza con velocità scalare costante, il punto si muove anche con velocità angolare costante e viceversa.

Pertanto, un punto si muove di moto **circolare uniforme** se percorre una **circonferenza** con **velocità angolare costante.**

15. La relazione che collega la velocità angolare ed il periodo nel moto circolare uniforme

Nel moto circolare uniforme, in un periodo T il punto in movimento percorre 2π radianti.

Pertanto[14],

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (13).$$

La relazione (13) esprime la velocità angolare ω in funzione del periodo T: essa ci dice che ω e T sono due grandezze inversamente proporzionali.

Ad esempio, se $T = 3\ \text{s}$ allora $\omega = \frac{2}{3}\pi\ \text{rad/s}$: il punto *percorre* dunque 120° gradi ogni secondo.

16. La relazione che collega la velocità angolare e la frequenza nel moto circolare uniforme

Inserendo nella (13) la relazione (1), ottengo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi f \qquad (14).$$

La relazione (14) esprime la velocità angolare ω in funzione della frequenza f: essa ci dice che ω e f sono due grandezze direttamente proporzionali.

Ad esempio, se $T = 10\ \text{Hz}$ allora $\omega = 20\pi\ \text{rad/s} \cong 63\ \text{rad/s} = 3600°$ al secondo.

[14] La velocità angolare ω è costante e, dunque, per calcolarla possiamo fare riferimento ad un intervallo di tempo a piacere.

17. La relazione che collega la velocità angolare e la velocità scalare nel moto circolare uniforme

Inserendo nella relazione (2) la (12), ottengo

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi}{T} \cdot r = \omega r \qquad (15).$$

La relazione (15) esprime la velocità scalare v in funzione della velocità angolare ω: essa ci dice che v e ω sono due grandezze direttamente proporzionali.

18. Il vettore velocità istantanea nel moto circolare uniforme

Affronto, in questo paragrafo, **il punto 3.** del protocollo cinematico.

Devo, quindi, determinare la **direzione**, il **verso** ed il **modulo** del **vettore velocità istantanea** $\vec{v}$ nel moto circolare uniforme.

Il **modulo** v del vettore $\vec{v}$, come so dalla definizione[15] è **costante**.
Pertanto,

$$v(t) = v \qquad (16).$$

Per ciò che riguarda la direzione ed il verso del vettore $\vec{v}$, ho già osservato[16] che il vettore velocità istantanea $\vec{v}$ è **tangente**, punto per punto, alla traiettoria e dunque **cambia continuamente direzione**.:

Il punto 3. del protocollo cinematico è così soddisfatto: **sono in grado di determinare in ogni istante del moto il vettore velocità istantanea**.

[15] Vedi §1.
[16] Vedi §1

19. Nel moto circolare uniforme c'è una accelerazione!

Nel MCU **c'è una accelerazione**: non deve trarre in inganno il fatto che il **valore della velocità** si mantiene costante!
L'accelerazione, infatti, **è una grandezza vettoriale** e, accanto ad un valore, presenta anche una direzione ed un verso. E **la direzione non resta costante**!

Per dimostrare che il punto P che si muove di MCU accelera, osservo che in tale moto devono *necessariamente* essere presenti un certo numero di forze[17] che **non si fanno equilibrio**.

Se, per assurdo, le forze presenti fossero equilibrate, ecco che, secondo il **Principio di inerzia,** il corpo dovrebbe muoversi lungo una traiettoria rettilinea, cosa che non accade, visto che la sua traiettoria è circolare.

Le *n* forze non equilibrate, sommate, danno luogo ad un'**unica forza** che, in accordo con la **seconda legge di Newton**, **produce nel corpo un'accelerazione** diretta come la forza stessa.

20. Il vettore accelerazione istantanea nel MCU: considerazioni preliminari

Affronto, in questo e nei successivi paragrafi, **il punto 4.** del protocollo cinematico.

L'obiettivo è, dunque, quello di **determinare il vettore accelerazione istantanea** $\vec{a}$ del un punto P, che si muove di moto circolare uniforme.

Il vettore accelerazione istantanea $\vec{a}$ è, per definizione, il **vettore accelerazione media**

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{v_2}-\overrightarrow{v_1}}{\Delta t} \qquad (17)$$

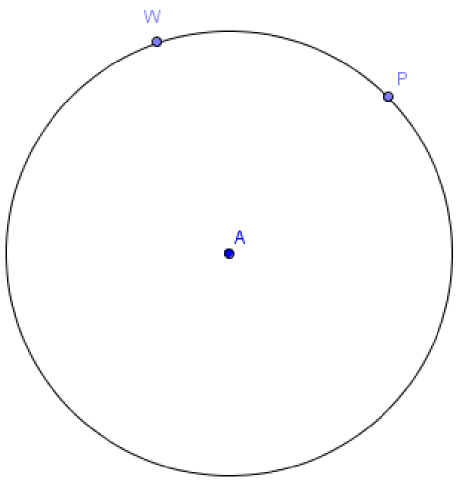
considerato però in un intervallo di tempo Δt **molto piccolo**, più precisamente **tendente a zero.**

[17] Tale numero può ridursi anche ad una sola forza.

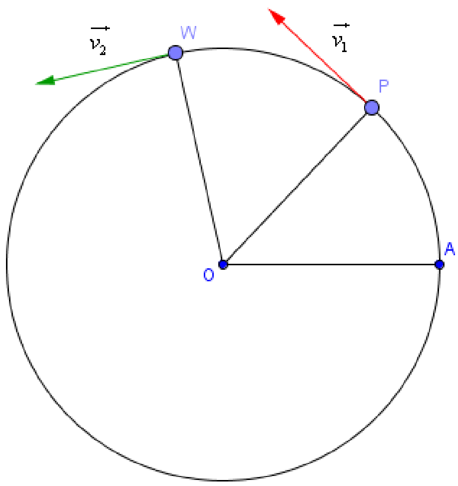
Per calcolare quindi il **vettore accelerazione istantanea** $\vec{a}$ del un punto P, ho bisogno di **calcolare** innanzitutto il **vettore accelerazione media** $\overrightarrow{a_m}$ associato al corpo in movimento.

A tale proposito, indico con W il punto della traiettoria raggiunto da P dopo Δt secondi.

Rappresento i punti P e W:



Nella figura che segue, $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ sono i vettori velocità istantanea $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, rispettivamente, del corpo nelle due posizioni P e W:



Calcolo, infine, **il vettore accelerazione media** $\overrightarrow{a_m}$ nel tratto curvilineo PW.

Si tratta allora di individuare la sua **direzione** ed il suo **verso** e di calcolare la sua **intensità**.

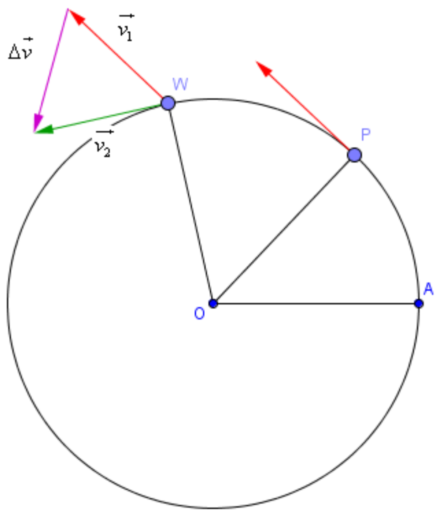
Per calcolare la direzione ed il verso del vettore $\overrightarrow{a_m}$, agisco nel modo che segue.

Riscrivo la (17) nella forma:

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta\vec{v} \qquad (18).$$

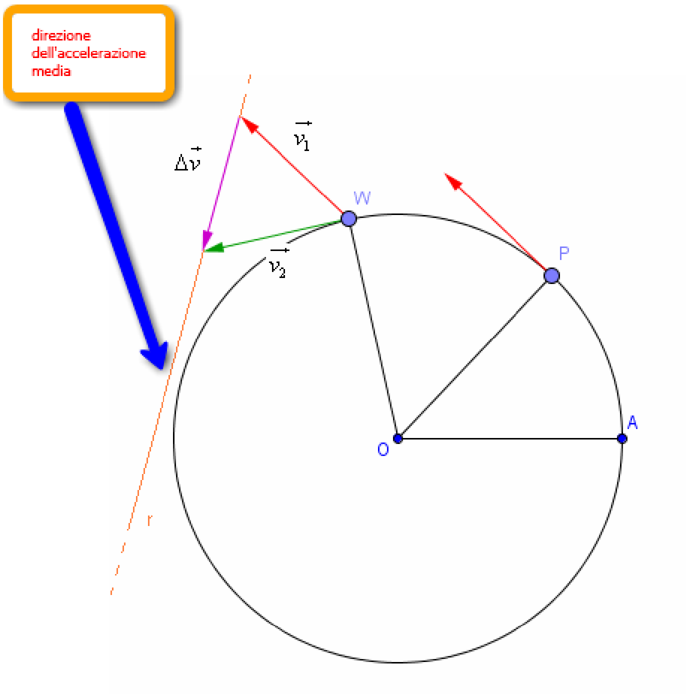
La (18) ci dice che il vettore $\overrightarrow{a_m}$ è un **multiplo positivo** del vettore $\Delta\vec{v}$ e dunque **ha la stessa direzione e lo stesso verso di quest'ultimo vettore.**

Si tratta così di costruire il vettore $\Delta\vec{v}$. A tal fine, traslo il vettore $\overrightarrow{v_1}$ in modo che abbia origine nel punto W e traccio il vettore$\Delta\vec{v}$:



Allora:

1. **la direzione dell'accelerazione media** $\overrightarrow{a_m}$ nel tratto curvilineo PW è individuata dalla retta r , sostegno del vettore $\Delta\vec{v}$ (osserva la figura seguente)
2. **il verso dell'accelerazione media** $\overrightarrow{a_m}$ è il verso del vettore $\Delta\vec{v}$.



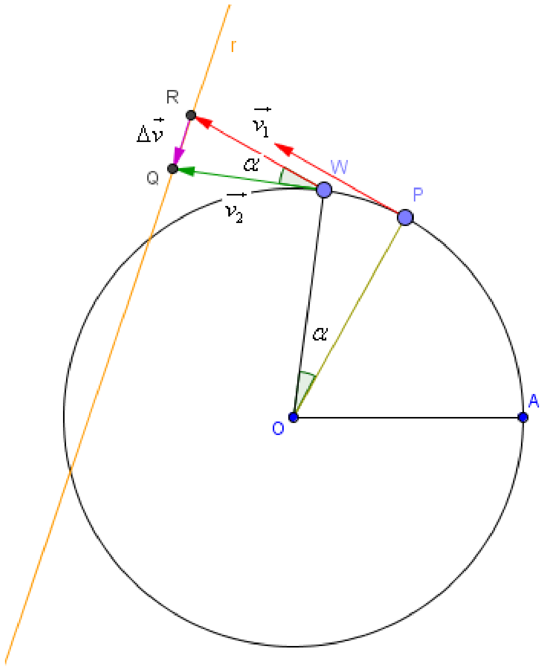
21. Il modulo del vettore accelerazione istantanea nel MCU

Comincio col determinare il **modulo** a del vettore accelerazione istantanea $\vec{a}$ del corpo nella sua posizione iniziale P .

Trascorsi Δt secondi dal passaggio del punto dalla posizione iniziale P , con Δt **molto piccolo**, il corpo raggiunge la posizione W .

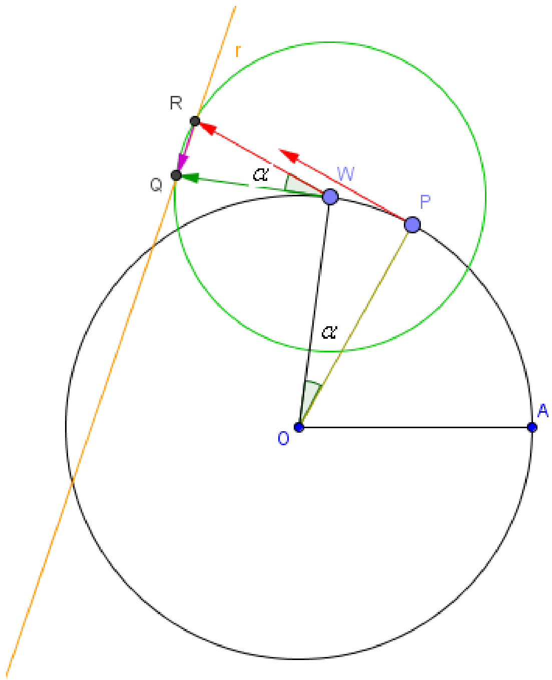
In questo caso, il punto W , se scegliamo l'intervallo di tempo opportunamente piccolo, si trova **in prossimità** del punto P .

Traccio il **triangolo** WRQ individuato dai vettori $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\Delta\vec{v}$:



Si può dimostrare, con un po' di geometria euclidea, che i due angoli α della precedente figura **sono congruenti**[18].

Traccio la circonferenza di centro W e raggio $v_1 = v_2 = v$.



[18] E' un buon esercizio.

Poiché Δt è un intervallo di tempo **opportunamente piccolo**, l'angolo α è **opportunamente piccolo** e posso così confondere la misura dell'arco RQ e quella del segmento RQ:

$$\overset{\frown}{RQ} \cong \overline{RQ} = \Delta v \qquad (19).$$

Si ha allora[19]:

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{RQ}}{v} \cong \frac{\Delta v}{v} \qquad (20).$$

La (20) è tanto più **precisa** quanto più il tempo Δt è infinitesimo[20].

Dalla (20) ricavo che

$$\Delta v = \alpha v \qquad (21)$$

ed infine

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\alpha v}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta t} \cdot v = \omega v$$

,

dove con ω ho indicato la **velocità angolare** del corpo.

Pertanto, **il modulo a dell'accelerazione istantanea** $\vec{a}$ è:

$$a = \omega \cdot v \qquad (22).$$

La (22) si può riscrivere utilizzando la (15) nei due seguenti modi:

$$a = \omega^2 \cdot r \qquad (23)$$

$$a = \frac{v^2}{r} \qquad (24)$$

---

[19] La prima uguaglianza della (20) deriva dalla definizione di radiante.

[20] Cioè, molto piccolo, tendente a zero.

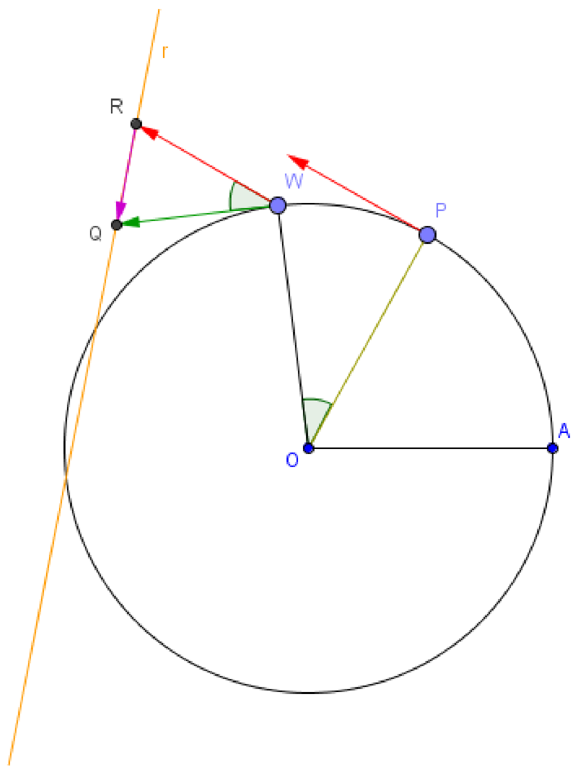
22. La direzione ed il verso vettore accelerazione istantanea nel MCU

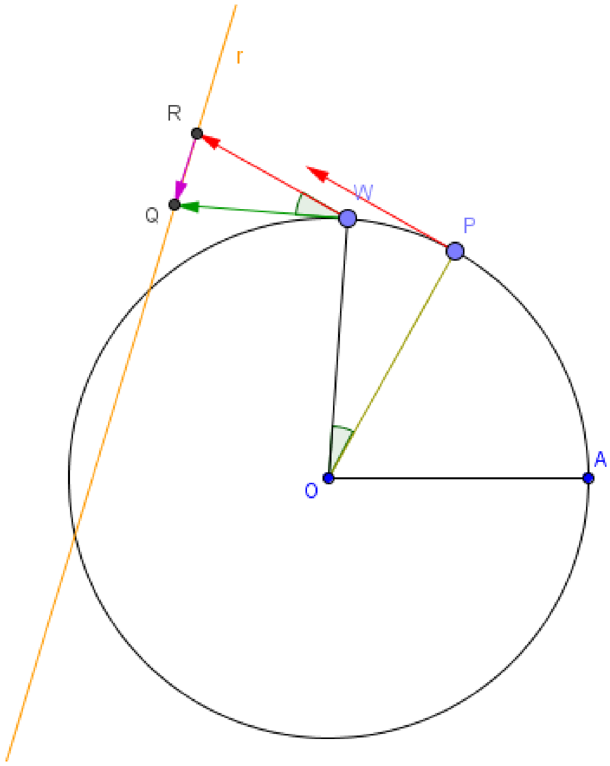
Determino, infine, la **direzione** ed il **verso** del vettore accelerazione istantanea $\vec{a}$ nel punto P.

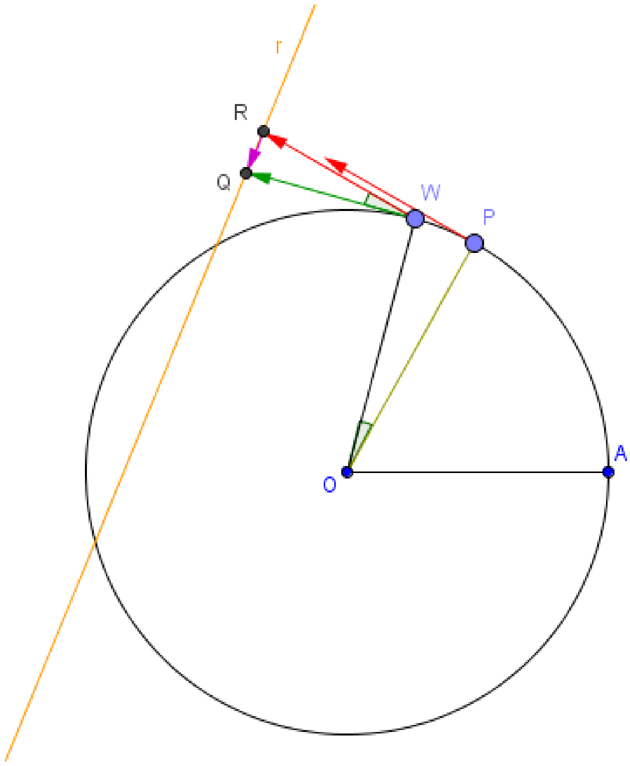
A tale proposito, considero una posizione W **prossima** a P.

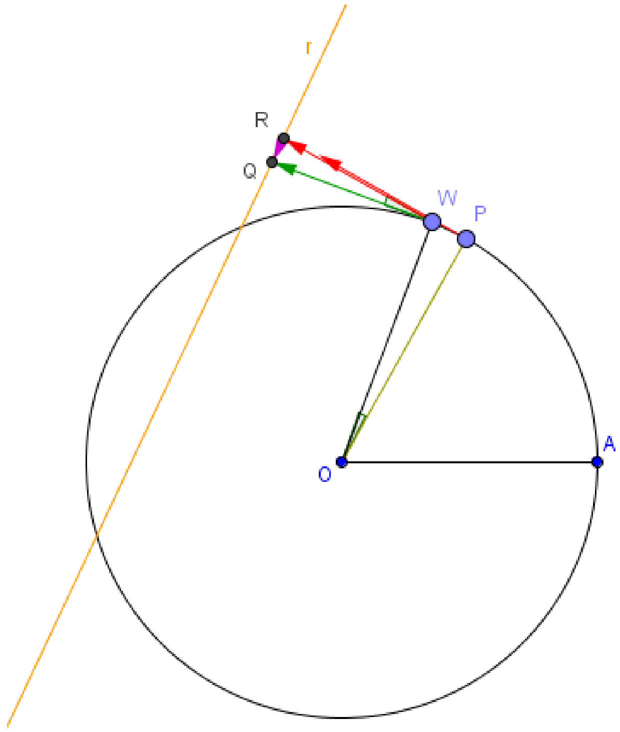
Si tratta allora di vedere cosa accade alla direzione r ed al verso del vettore $\Delta\vec{v}$, quando l'intervallo di tempo Δt si avvicina (tende) a zero, cioè quando W si avvicina a P muovendosi lungo la circonferenza.

Osserva attentamente le immagini che seguono nelle quali il punto W **si avvicina sempre di più** alla posizione P:




r
R
W
Q
P
A
O


r
R
Q
W
P
A
O



Man mano che il punto W si avvicina sempre di più alla posizione P, noto che la retta r **ruota** fino a disporsi **parallelamente** al raggio PO.

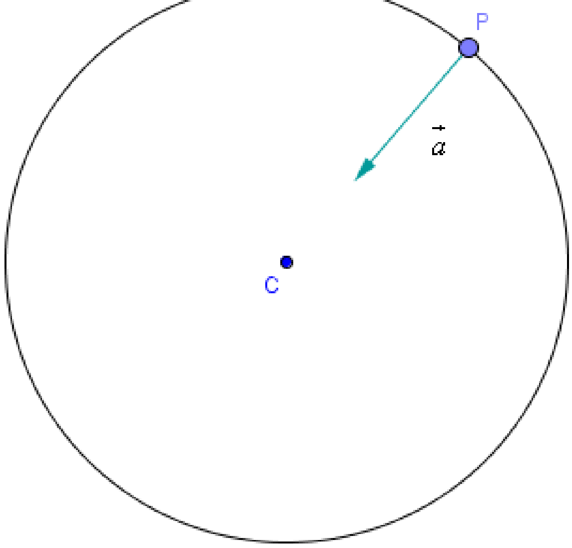
Se ne deduce che **la direzione del vettore accelerazione istantanea** $\vec{a}$ nel punto P è **radiale**, cioè diretta lungo il raggio passante per P.

Inoltre, il **verso** del vettore $\vec{a}$ è diretto dal punto P al centro O della circonferenza.

Per tale motivo, a tale accelerazione si dà il nome di **accelerazione centripeta**, che tende cioè verso il centro.

L'accelerazione centripeta si indica solitamente con $\overrightarrow{a_c}$ ed il suo modulo con a_c.

Ecco disegnato nella figura che segue, il **vettore accelerazione istantanea** $\overrightarrow{a_c}$ nel punto P:



23. La forza centripeta

La seconda legge della dinamica afferma che la forza $\vec{F}$ responsabile dell'accelerazione centripeta $\overrightarrow{a_c}$ ha espressione:

$$\vec{F} = m \cdot \overrightarrow{a_c} \qquad (26)$$

La forza $\vec{F}$ ha la stessa direzione e lo stesso verso dell'accelerazione $\overrightarrow{a_c}$: è dunque una **forza centripeta**.

Tale forza si indica solitamente con il simbolo $\overrightarrow{F_c}$ e il suo **modulo**, tenendo conto della (23) è:

$$F_c = m\omega^2 r \qquad (27)$$